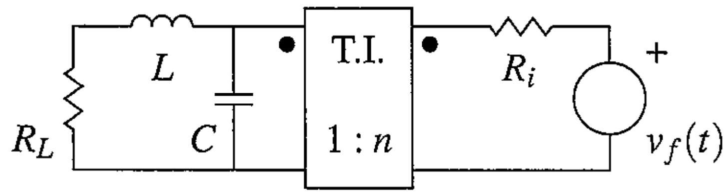
Certamen #2 – ELO102 – S1 2016

Soluciones

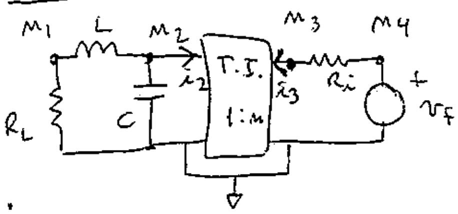
Problema 2.1 (10 puntos) *En la red de la figura, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red. (T.I. es un transformador ideal.)*



Solución

Puede aplicarse voltajes de nodos o corrientes de malla

V. de nodos:



LCK en cada nodo:

n_1: $\dfrac{v_{n1}}{R_L} + \dfrac{1}{L}D^{-1}(v_{n1} - v_{n2}) = 0$

n_2: $\dfrac{1}{L}D^{-1}(v_{n2} - v_{n1}) + CD\,v_{n2} + i_2 = 0$

n_3: $i_3 + \dfrac{(v_{n3} - v_{n4})}{R_i} = 0$

n_4: $v_{n4} = v_f$

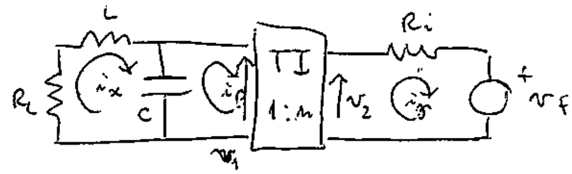
Además el transformador ideal establece

$$\frac{v_{n2}}{v_{n3}} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{i_2}{i_3} = -n$$

6 ecuaciones
6 incógnitas: $\{v_{n1}, \ldots, v_{n4}, i_2, i_3\}$

C. de mallas:



LVK en cada malla:

$$R_L i_\alpha + L\frac{di_\alpha}{dt} + \frac{1}{C}D^{-1}(i_\alpha - i_\beta) = 0$$

$$\frac{1}{C}D^{-1}(i_\beta - i_\alpha) + v_1 = 0$$

$$-v_2 + R_i i_\gamma + v_f = 0$$

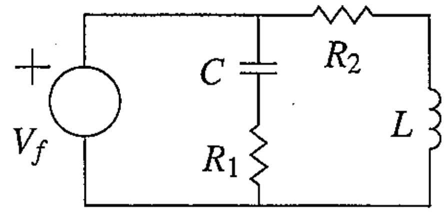
Además el transformador ideal establece

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{i_\beta}{i_\gamma} = n$$

5 ecuaciones
5 incógnitas: $\{i_\alpha, i_\beta, i_\gamma, v_1, v_2\}$

Problema 2.2 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente de voltaje constante ha estado encendida por mucho tiempo y se* **apaga** *en $t = 0$. Determine la energía total disipada por la resistencia R_1 y la energía total disipada por la resistencia R_2, ambas en el intervalo $[0, \infty)$.*

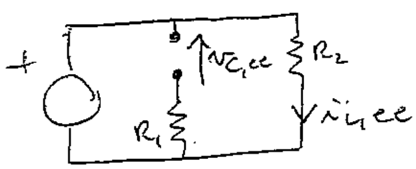


Solución

Si la fuente de voltaje ha estado encendida hace mucho podemos afirmar que se ha alcanzado el estado estacionario:

- El condensador es un circuito abierto y
- El inductor es un corto circuito

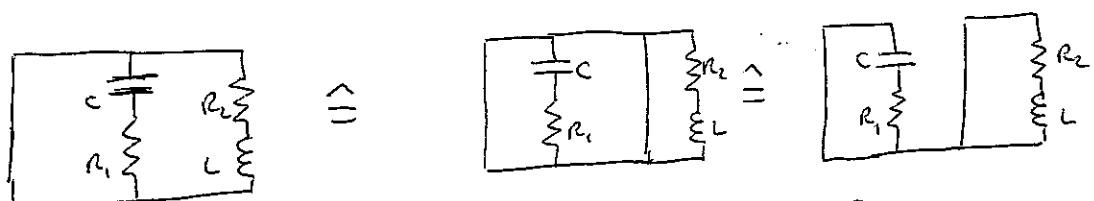
Por tanto



$v_{C,ee} = V_f$

$i_{L,ee} = \frac{V_f}{R_2}$

Al apagar la fuente:



Es decir, el condensador se descarga solo a través de R_1
y el inductor se descarga solo a través de R_2
(o "desfluja")

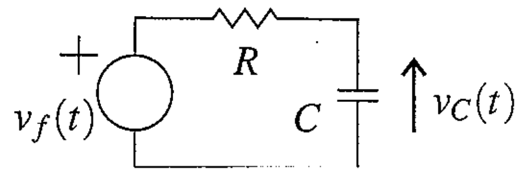
Por tanto, la energía total disipada por R_1 en $[0, \infty)$ es la energía inicial almacenada en C: $E_1 = \frac{1}{2} C (v_{C,ee})^2 = \frac{1}{2} C V_f$

y la energía total disipada por R_2 en $[0, \infty)$ es la energía inicial almacenada en L: $E_2 = \frac{1}{2} L (i_{L,ee})^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_f}{R_2}\right)$

Problema 2.3 (10 puntos) *En la red de la figura,*

$$R = 1\,[\Omega] \qquad C = 0{,}25\,[F] \qquad v_f(t) = \cos(4t)\mu(t)\,[V] \qquad v_C(0) = 0\,[V]$$

Haga un gráfico de $v_C(t)$ para $t \geq 0$, justificando claramente su respuesta.



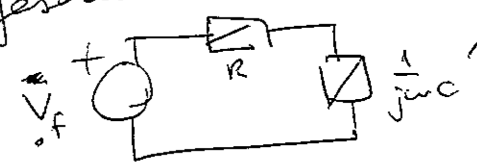
Solución

En la respuesta del sistema deben aparecer el transiente y el estado estacionario:

- El transiente en un circuito RC es de la forma $e^{-t/RC}$

Note que $\tau = RC = 0{,}25$ [s] por tanto el transiente "desaparece" aproximadamente luego de $4\tau = 1$ [s]

- El estado estacionario puede obtenerse usando la transformada fasorial:

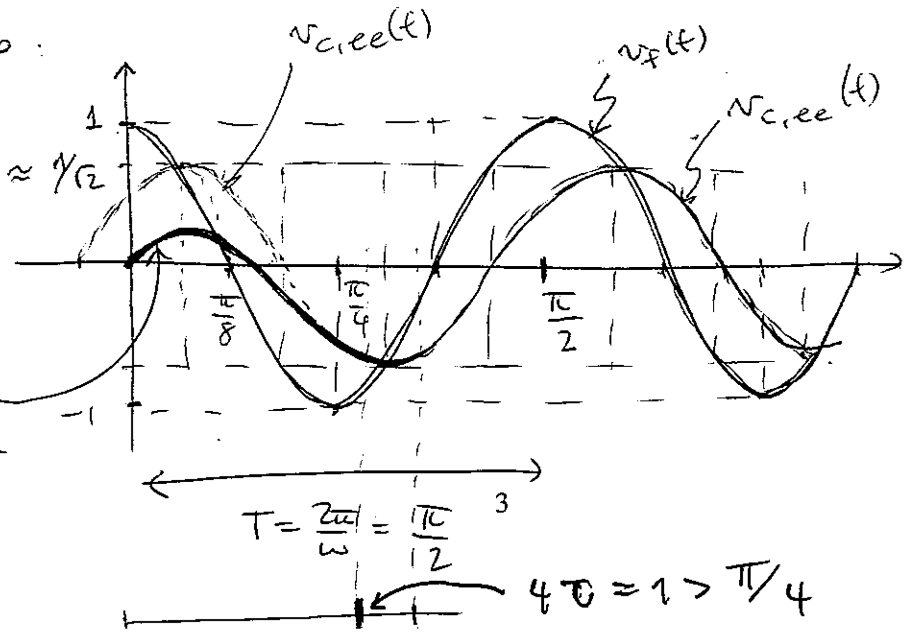


$$\dot V_c = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\dot V_f = \frac{1}{1 + j\omega RC}\dot V_f$$

Reemplazando $\dot V_c = \frac{1}{1 + j\cdot 4\cdot 0.25}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\angle 0$

$$\Rightarrow v_{C,ee}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(4t - \pi/4)$$

Gráfico:



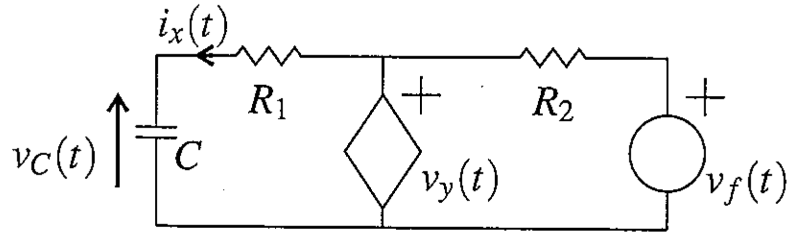
$v_C(t)$ con su transiente

Note que se debe cumplir $v_C(0) = 0$

Problema 2.4 (10 puntos) *En la red de la figura,*

$$v_y(t) = k i_x(t) \qquad v_f(t) = A\sin(\omega t) \qquad v_C(0) = V_0$$

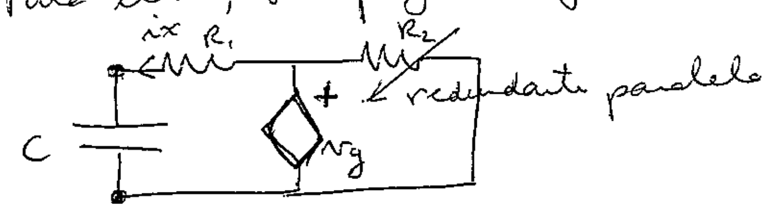
Determine bajo qué condiciones la red alcanza el estado estacionario.

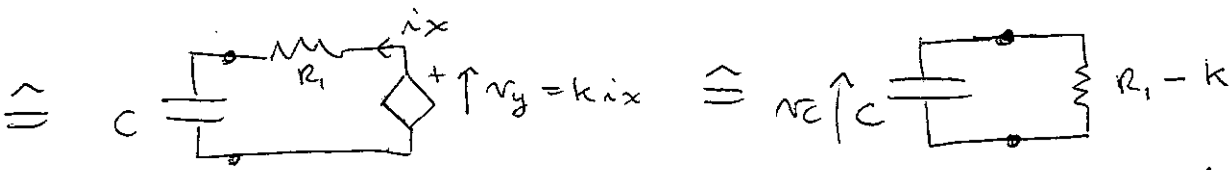


Solución

Para que exista el estado estacionario, el sistema debe ser "estable", es decir, la respuesta a c.i. debe contener sólo componentes que decaen a cero cuando $t \to \infty$.

Para ello, se apaga la fuente y se ve la respuesta a c.i.





donde se aprecia que la respuesta a condición inicial es

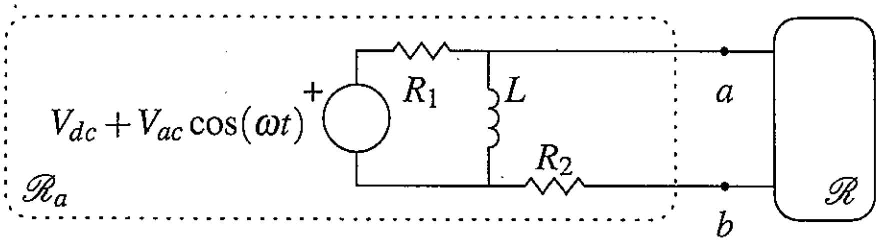
$$v_C(t) = V_0\, e^{-\frac{t}{(R_1-k)C}}\, \mu(t)$$

Para que decaiga a cero (exponencial decreciente)

$$R_1 - k > 0 \iff \boxed{k < R_1}$$

es la condición pedida.

Problema 2.5 (10 puntos) *En la red de la figura, determine el equivalente Thévenin en estado estacionario de la red $\mathscr{R}_a$ desde los terminales $a-b$.*

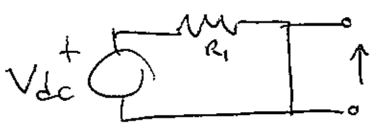


Solución

→ La fuente Thévenin se obtiene calculando el voltaje de circuito abierto de R_a:

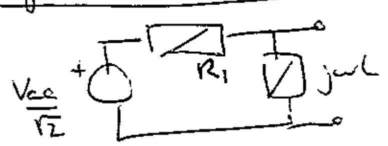
$v_f(t)$ tiene dos frecuencias ⇒ Aplicamos superposición

$\underline{\omega=0:}$ El inductor se comporta como corto circuito, por tanto



$v_{ca1} = 0$

Para una frecuencia ω: Aplicamos T. Fasorial:

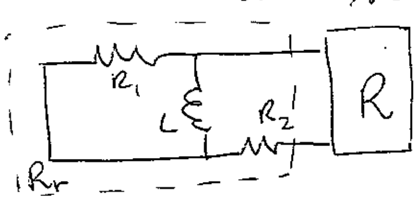


$$\dot{V}_{ca2} = \frac{j\omega L}{R_1+j\omega L}\cdot\frac{V_{ac}}{\sqrt{2}}\angle 0$$

$$= \frac{(\omega L)^2 - j\omega L R_1}{R_1^2+(\omega L)^2}\cdot\frac{V_{ac}}{\sqrt{2}}\angle 0$$

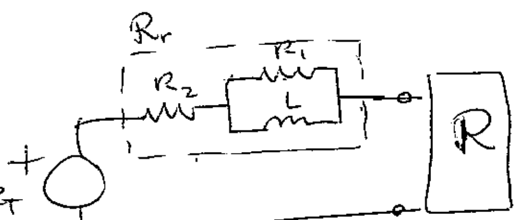
$$\Rightarrow v_{ca2}(t) = \frac{V_{ac}\,\omega L}{\sqrt{R_1^2+(\omega L)^2}}\cos\left(\omega t - \mathrm{Arctg}\left(\frac{R_1}{\omega L}\right)\right)$$

→ La red Thévenin se obtiene apagando la fuente de voltaje:



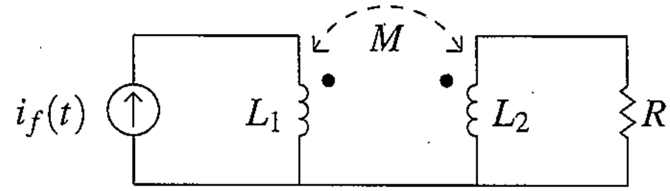
La red R_r no puede simplificarse más

⇒ Por tanto el equivalente Thévenin es de la forma:



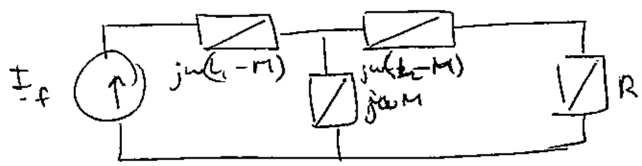
en que $e_T(t) = \underbrace{\cancel{v_{ca1}}}_{0} + v_{ca2} = \frac{V_{ac}\,\omega L}{\sqrt{R_1^2+(\omega L)^2}}\cos\left(\omega t - \mathrm{Arctg}\left(\frac{R_1}{\omega L}\right)\right)$

Problema 2.6 (10 puntos) *La red de la figura se encuentra en estado estacionario y la fuente de corriente es $i_f(t) = A\cos(\omega t)$. Determine la potencia activa entregada por la fuente de corriente.*

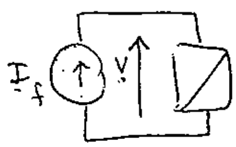


Solución

Para determinar la potencia activa, trabajamos en el dominio de la transformada fasorial para obtener la impedancia equivalente:



$\hat{=}$



$$\underline{Z}_{eq} = j\omega(L_1-M) + \left(\frac{1}{j\omega M} + \frac{1}{j\omega(L_2-M)+R}\right)^{-1}$$

$$= j\omega(L_1-M) + \frac{j\omega M\,[j\omega(L_2-M)+R]}{j\omega L_2 + R}$$

$$= j\omega(L_1-M) + \frac{\left(-\omega^2 M(L_2-M) + j\omega MR\right)\left(R - j\omega L_2\right)}{(\omega L_2)^2 + R^2}$$

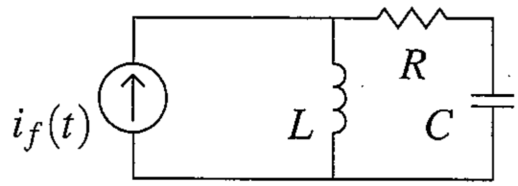
$$= \frac{-\omega^2 MR(L_2-M) + \omega^2 MRL_2}{(\omega L_2)^2 + R^2} + j\left[\text{ algo }\right]$$

$$= \frac{\omega^2 M^2 R}{(\omega L_2)^2 + R^2} + j\left[\text{ algo }\right]$$

Note que $\quad \underline{P}_{ap} = \underline{V}\,\underline{I}_f^* = \underline{Z}_{eq}\,|\underline{I}_f|^2$

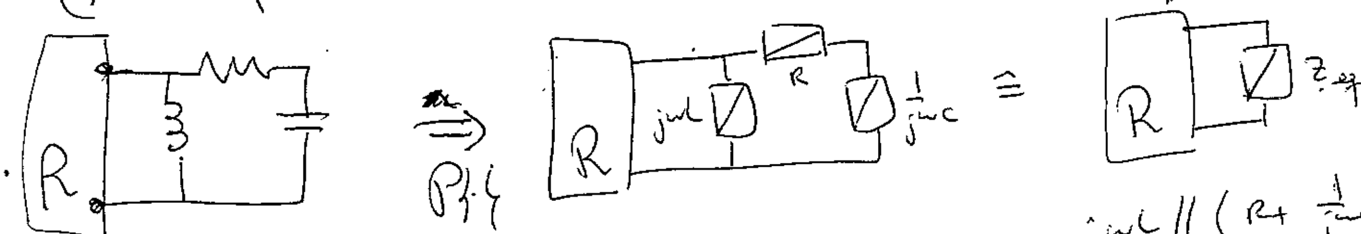
$$= \underbrace{\frac{\omega^2 M^2 R}{(\omega L_2)^2 + R^2}\cdot\frac{A}{2}}_{P_{ac}} + j\left[\text{ algo }\right]\frac{A}{2}$$

Problema 2.7 (10 puntos) *La red de la figura se encuentra en estado estacionario y la fuente de corriente es $i_f(t) = A\cos(\omega t + \theta)$. Determine para qué rango de frecuencias de la fuente el factor de potencia (F.P.) desde los terminales de la fuente es inductivo y para qué rango de frecuencias es capacitivo.*



Solución

Para determinar si el factor de potencia es inductivo o capacitivo basta obtener el ∡ o la parte imaginaria de la impedancia equivalente.
(Nota que No depende de la fuente de corriente)



$$Z_{eq} = j\omega L \,||\, \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)$$

$$= \frac{j\omega L\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{j\omega L(1 + j\omega RC)}{(1-\omega^2 LC) + j\omega RC}$$

$$= \frac{(-\omega^2 LRC + j\omega L)((1-\omega^2LC) - j\omega RC)}{(1-\omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2}$$

La parte imaginaria de Z_{eq} es:

$$\mathrm{Im}\{Z_{eq}\} = \frac{\omega L(1-\omega^2LC) + \omega^3 LR^2C}{(1-\omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{\omega L[(1-\omega^2LC) + \omega^2R^2C^2]}{(1-\omega^2LC)^2 + (\omega RC)^2}$$

Por tanto $\mathrm{Im}\{Z_{eq}\} > 0 \iff 1 - \omega^2(LC - R^2C^2) > 0 \iff \omega < \frac{1}{RC\sqrt{\frac{L}{R^2C} - 1}}$ F.P. IN

$\mathrm{Im}\{Z_{eq}\} < 0 \iff \ldots \iff \omega > \frac{1}{RC\sqrt{\frac{L}{R^2C} - 1}}$ F.P. CAP.