Nombre: Solución

ELO102 – S1 2016 – Control #3 – 28 de marzo de 2016

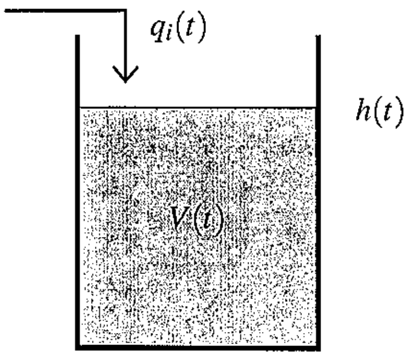
Problema 3.1 *Considere el estanque de la figura izquierda en que $V(t)$ y $h(t)$ son, respectivamente, el volumen y nivel de líquido. El área de la sección transversal del estanque es $A = 1{,}5\,[m^2]$ e inicialmente hay $300\,[lt]$ de agua en él. Sólo existe un caudal de entrada $q_i(t)$ que se muestra en la figura derecha.*

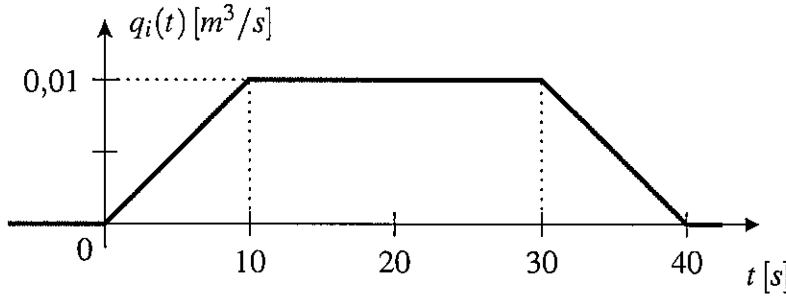
(a) Identifique claramente las señales del sistema, distinguiendo entre entradas y salidas.

(b) Identifique claramente la(s) condición(es) inicial(es).

(c) Determine la(s) ecuación(es) diferencial(es) que modela(n) el sistema.

(d) Determine $h(t)$ para $t > 0$.





(a) Entrada del sistema: caudal $q_i(t)$
Salida del sistema: altura $h(t)$ y/o volumen $V(t)$

(b) Condición inicial: altura inicial $h(0)$ o volumen inicial $V(0)$

(c) Por conservación de masa $\frac{dV}{dt} = q_i(t)$

además el volumen es $V(t) = A\,h(t)$

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\,q_i(t) \qquad h(0) = h_0}$$

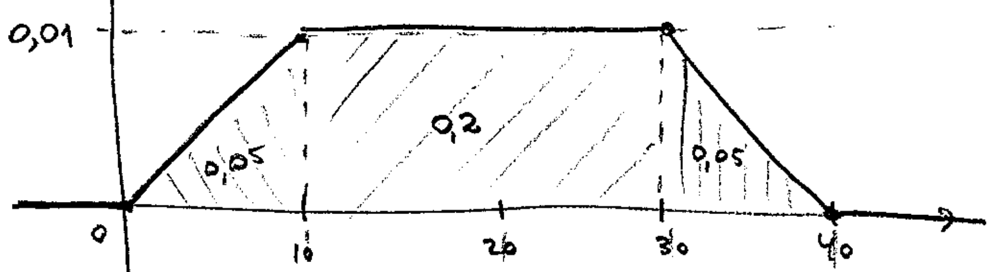
(d) La solución de la ecuación diferencial es directa:

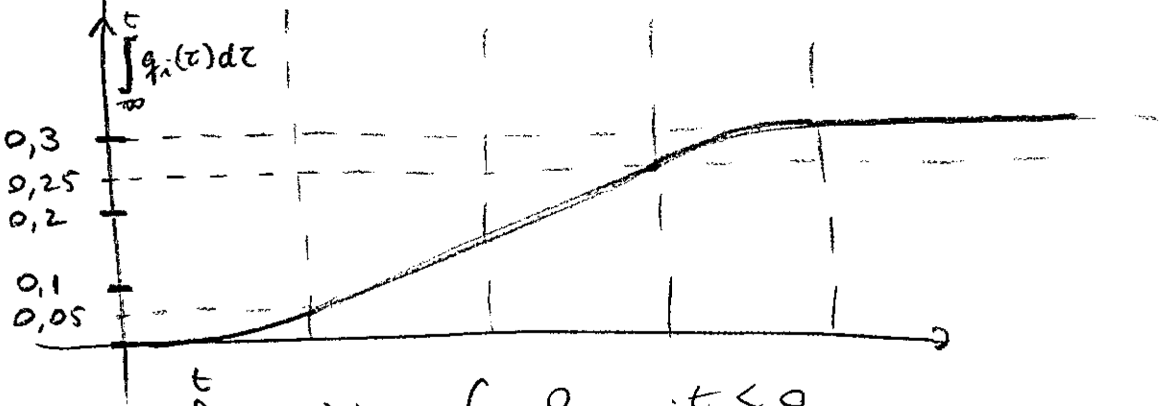
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A}\,q(t) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{t} q_i(\tau)\,d\tau = h(0) + \frac{1}{A}\int_{0}^{t} q_i(\tau)\,d\tau$$

Donde $h(0) = \frac{V(0)}{A} = \frac{0{,}3\,[m^3]}{1{,}5\,[m^2]} = 0{,}2\,[m]$

y la integral del caudal se puede obtener gráfico y analíticamente ...

$$q_i(t) = 10^{-3}\left(r(t) - r(t-10) - r(t-30) + r(t-40)\right)$$

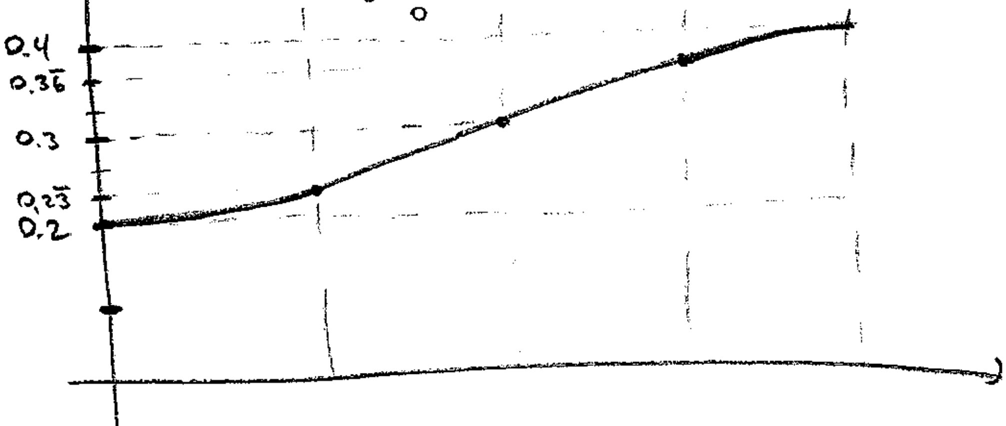




$$\int_{-\infty}^{t} q_i(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & ; t \leq 0 \\ \frac{1}{2}\frac{t^2}{1000} & ; 0 < t \leq 10 \\ \frac{t}{100} - 0.05 & ; 10 < t \leq 30 \\ \frac{-(t-40)^2}{2 \cdot 1000} + 0{,}3 & ; 30 < t \leq 40 \\ 0.3 & ; t > 40 \end{cases}$$

$$h(t) = 0{,}2 + \frac{2}{3}\int_{0}^{t} q_i(\tau)d\tau$$

$\Rightarrow$)



$$h(t) = \begin{cases} 0.2 & ; t = 0 \\ 0.2 + \frac{1}{3}\frac{t^2}{1000} & ; 0 < t \leq 10 \\ 0.2 + \frac{2}{3}\left(\frac{t}{100} - 0{,}05\right) & ; 10 < t \leq 30 \\ 0{,}4 - \frac{1}{3}\frac{(t-40)^2}{1000} & ; 30 < t \leq 40 \\ 0.4 & ; t > 40 \end{cases}$$