**Nombre:** Solución

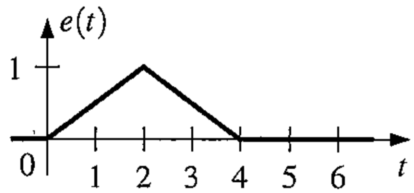
# ELO102 – S1 2016 – Control #4 – 4 de abril de 2016

**Responda SOLO UNO de los problemas propuestos. Indique claramente cuál responde: 4.1 4.2**

**Problema 4.1** *La respuesta a escalón de un sistema lineal e invariante en el tiempo (con condiciones iniciales cero) es*

$$r(t) = T\left\langle x(0) = 0; e(t) = \mu(t) \right\rangle = e^{-2t}\mu(t) \qquad ; t \geq 0$$

- *Grafique la respuesta del sistema cuando la excitación $e(t)$ es como en la figura (con condiciones iniciales cero).*




- La excitación de la figura se puede describir mediante funciones rampa:

$$e(t) = \frac{1}{2} r(t) - r(t-2) + \frac{1}{2} r(t-4)$$

- y la función rampa se puede expresar como la integral de la función escalón unitario $\quad r(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau)d\tau$

- El sistema es LTI por tanto puede usarse la respuesta a escalón para calcular la respuesta a una rampa

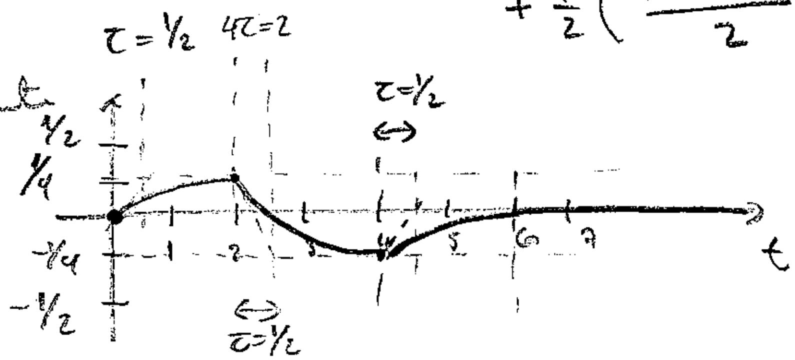
$$T\langle 0; r(t)\rangle = T\langle 0; \int_0^t \mu(\tau)d\tau\rangle = \int_0^t (T\langle 0; \mu(\tau)\rangle)d\tau$$

$$= \int_0^t e^{-2\tau}d\tau = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-2t}\right] \quad \forall t \geq 0$$

- y esto se puede usar para obtener la respuesta a la señal de la figura

$$T\langle 0; \tfrac{1}{2}r(t) - r(t-2) + \tfrac{1}{2}r(t-4)\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2t}}{2}\right)\mu(t) - \left(\frac{1-e^{-2(t-2)}}{2}\right)\mu(t-2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2(t-4)}}{2}\right)\mu(t-4)$$

- Gráficamente



**Problema 4.2** *Considere el sistema definido por*

$$r(t) = T\left\langle x(t_o) = x_o\,;\, e(t)\right\rangle = \cos(t-t_o)x_o + \int_{t_o}^{t} e^2(\tau)d\tau \qquad \forall t \geq t_o$$

- *Determine si el sistema es lineal.*
- *Determine si el sistema es invariante en el tiempo.*

- El sistema es no lineal pues, por ejemplo:

$$T\langle 0\,;\,\lambda e(t)\rangle = \int_{t_o}^{t} (\lambda e(\tau))^2 d\tau = \lambda^2 \int_{t_o}^{t} e^2(\tau)\,d\tau$$

$$= \lambda^2\, T\langle 0\,;\, e(t)\rangle$$

es decir, no cumple homogeneidad en la excitación

- consideramos $\tilde{e}(t) = e(t-T)$ y la condición inicial $x(\underbrace{t_o+T}_{\tilde{t}_o}) = x_o$

calculamos $\tilde{r}(t) = T\langle x(\tilde{t}_o) = x_o\,;\,\tilde{e}(t)\rangle$

$$= T\langle x(t_o+T) = x_o\,;\, e(t-T)\rangle$$

$$= \cos(t-(t_o+T))\,x_o + \int_{t_o+T}^{t} (e^2(\tau-T))\,d\tau \qquad \eta = \tau - T,\ d\eta = d\tau$$

$$= \cos((t-T)-t_o)\,x_o + \int_{t_o}^{t-T} e^2(\eta)\,d\eta$$

$$= r(t-T)$$

Por tanto sí es invariante en el tiempo.