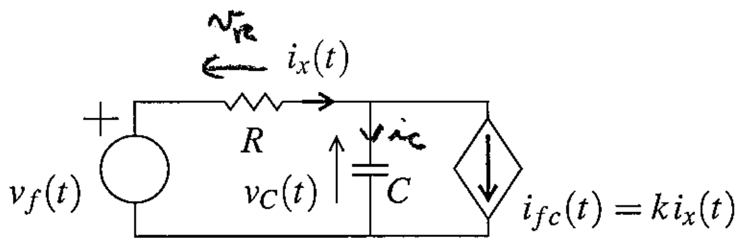
Nombre: Solución

ELO102 – S1 2017 – Control #7 – 26 de mayo de 2017

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

Problema 7.1 *En la red de la figura,* $R = 1[k\Omega]$, $C = 1[\mu F]$, $k = 0,5$, $v_f(t) = 5\mu(t)[V]$, *y* $v_C(0) = 0$. *Determine* $v_C(t)$, *para* $t \geq 0$.



Primero determinaremos la E.D.O. que satisface $v_c(t)$

LCK: $i_x(t) = i_c(t) + i_{fc}(t)$

LVK: $v_f(t) = v_R(t) + v_c(t)$

III: $v_R(t) = R\, i_x(t)$

$i_c(t) = C \dfrac{dv_c}{dt}(t)$

$i_{fc}(t) = k\, i_x(t)$

5 ecuaciones l.i.
5 incógnitas: $\{v_R, i_x, v_c, i_c, i_{fc}\}$

Despejamos para $v_c(t)$:

en LVK: $v_f(t) = R\, i_x(t) + v_c(t)$

en LCK: $i_x(t) = C \dfrac{dv_c(t)}{dt} + k\, i_x(t)$

2 ecs
2 incógnitas

$$\Rightarrow \boxed{v_f(t) = \underbrace{\frac{RC}{1-k}}_{\tau} \frac{dv_c}{dt} + v_c(t)}$$

E.D.O. para $v_c(t)$
c.i. $v_c(0) = 0$

$$\tau = \frac{10^3 \cdot 10^{-6}}{1 - 1/2} = 2 \cdot 10^{-3}$$

y si $v_f(t) = 5\mu(t) \Rightarrow v_c(\infty) = 5\ [V]$
cuando $\dfrac{dv_c}{dt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

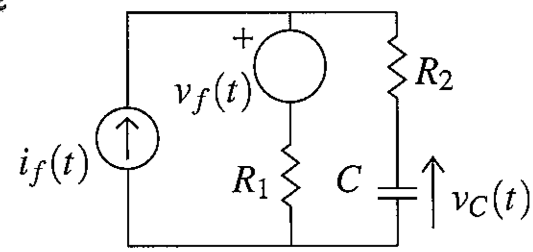
$$\Rightarrow v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-t/\tau}$$

$$= 5 - 5e^{-t/\tau} \quad \forall t \geq 0$$

en que $\tau = 2 \cdot 10^{-3}$

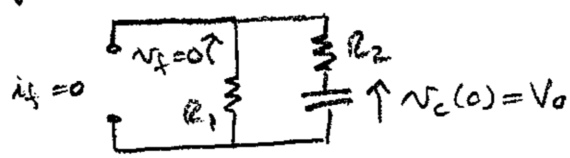
$\boxed{\text{Solución}}$

Problema 7.2 *En la red de la figura, $v_C(0) = V_o$ y ambas fuentes son constantes, $i_f(t) = I_f$ y $v_f(t) = V_f$. Determine ~~la energía instantánea almacenada~~ el voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*



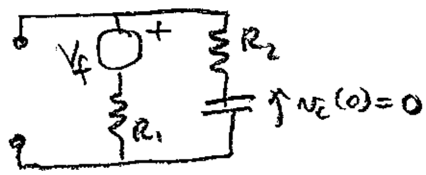
Para calcular $v_c(t)$ puede aplicarse, por ejemplo, superposición:

i) Apagando AMBAS fuentes:



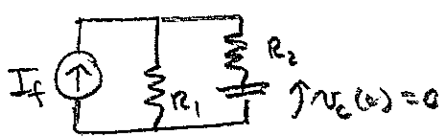
$$v_{c1}(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$
$$\tau = (R_1+R_2)C$$

ii) $i_f(t)=0$, c.i. $=0$



$$v_{c2}(t) = V_f - V_f e^{-t/\tau}$$

iii) $v_f(t)=0$; c.i. $=0$



$$v_{c3}(t) = I_fR_1 - I_fR_1 e^{-t/\tau}$$

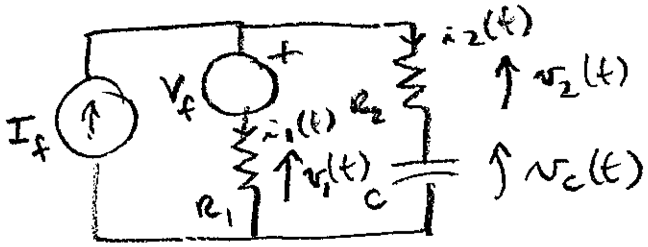
[En los tres casos se ha utilizado la expresión:
$$v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-t/\tau}$$]

Por tanto, cuando $i_f(t)=I_f$, $v_f(t)=V_f$ y $v_c(0)=V_0$

$$\Rightarrow v_c(t) = (V_f + I_fR_1)(1-e^{-t/\tau}) + V_0 e^{-t/\tau}$$

en que $\tau = (R_1+R_2)C$

Alternativamente, se pueden plantear ecuaciones para obtener la EDO del voltaje en el condensador:



LCK: $I_f = i_1(t) + i_2(t)$

LVK: $V_f + v_1(t) = v_2 + v_c(t)$

III: $v_1(t) = R_1 i_1(t)$

$v_2(t) = R_2 i_2(t)$

$i_2(t) = C \frac{dv_c}{dt}$

5 ecs. / 5 incógnitas: $\{v_1, v_2, v_c, i_1, i_2\}$

Despejando para $v_c(t)$:

LCK: $I_f = i_1(t) + C\frac{dv_c(t)}{dt}$

LVK: $V_f + R_1 i_1(t) = R_2 C \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t)$

2 ecs

2 incógnitas.

$$\Rightarrow \quad V_f + R_1\left(I_f - C\frac{dv_c}{dt}\right) = R_2 C \frac{dv_c}{dt} + v_c$$

$$\Rightarrow \quad V_f + I_f R_1 = \underbrace{(R_1+R_2)C}_{\tau} \frac{dv_c}{dt} + v_c$$

$$\Rightarrow \quad v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))\, e^{-t/\tau}$$

$$= \underbrace{(V_f + I_f R_1)}_{} + (V_0 - V_f - I_f R_1)\, e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} \qquad \forall t \geq 0$$

se obtiene de la EDO cuando $\frac{dv_c}{dt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$