Solución

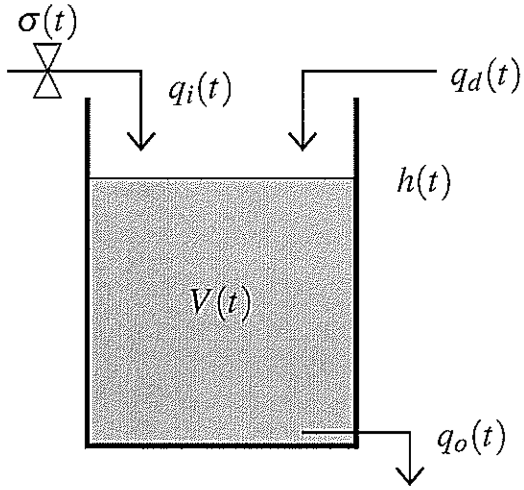
Certamen #1 – ELO102 – S1 2018

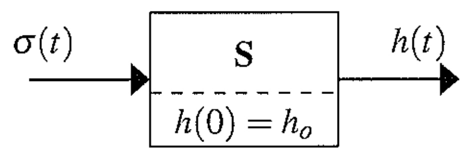
Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *Considere el estanque descrito en la Ayudantía #2 que se muestra en la figura. Este puede ser modelado por la ecuación diferencial*

$$A\frac{dh(t)}{dt} = -k_o\sqrt{h(t)} + k_i\sigma(t) + q_d(t)$$

Considerando como excitación $\sigma(t)$ y como respuesta el nivel de agua $h(t)$, determine si el sistema es lineal, fundamentando claramente su respuesta.





Solución

Hay diversas formas de probar el que el sistema es NO lineal:

i) Altura en estado estacionario: (Suponiendo $q_d = 0$)

Si $\sigma(t) = \sigma_1$: constante luego de un rato el nivel de agua alcanza una altura de equilibrio. De hecho

$$A\cancel{\frac{dh}{dt}}^{\,0} = -k_o\sqrt{h_1} + k_i\sigma_1 \Rightarrow h_1 = \left(\frac{k_i\sigma_1}{k_o}\right)^2$$

Pero si $\sigma(t) = \sigma_2 = 2\sigma_1 \Rightarrow$ la altura de equilibrio será

$$h_2 = \left(\frac{k_i 2\sigma_1}{k_o}\right)^2 = 4h_1 \neq 2h_1$$

$\Rightarrow$ NO lineal

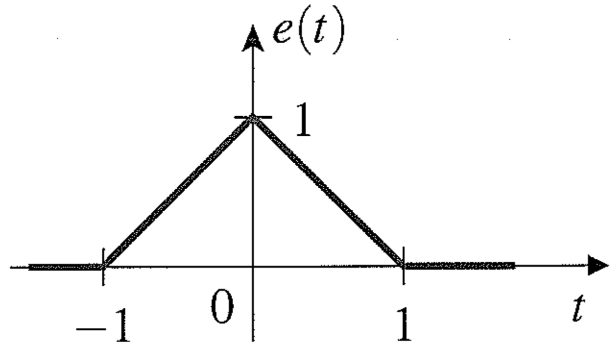
ii) Respuesta a condición inicial:

(Suponiendo $q_d = 0$ y $\sigma(t) = 0$)

Tenemos una e.d.o. homogénea $A\frac{dh}{dt} = -k_o\sqrt{h} \Rightarrow \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{k_o}{A}dt$

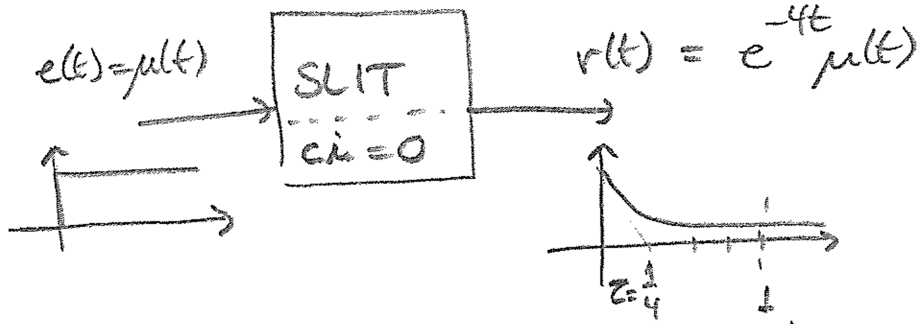
$\Rightarrow 2\sqrt{h} = -\frac{k_o}{A}t + C \Rightarrow h(t) = \left(C - \frac{k_o}{2A}t\right)^2 \underset{h(0)=h_o}{=} \left(\sqrt{h_o} - \frac{k_o}{2A}t\right)^2$ es NO lineal en la c.i.

Problema 1.2 (10 puntos) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo cuando la excitación es un escalón unitario (con condiciones iniciales cero) es $r(t) = e^{-4t}\mu(t)$. Determine la respuesta del sistema cuando la excitación es como en la figura (con condiciones iniciales cero).*



Solución

Tenemos



Dado que el sistema es lineal e invariante en el tiempo

Si $T\langle c.i.=0;\ e(t)=\mu(t)\rangle = e^{-4t}\mu(t)$

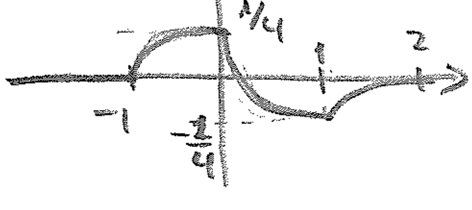
$$\Rightarrow \quad T\langle c.i.=0;\ e(t)=\underbrace{\int_0^t \mu(\tau)\,d\tau}_{\text{rampa unitaria}}\rangle = \int_0^t e^{-4\tau}\,d\tau = -\frac{e^{-4\tau}}{4}\Bigg|_0^t = \frac{1-e^{-4t}}{4}$$

La excitación en la figura es $e_2(t) = \text{rampa}(t+1) - 2\,\text{rampa}(t) + \text{rampa}(t-1)$

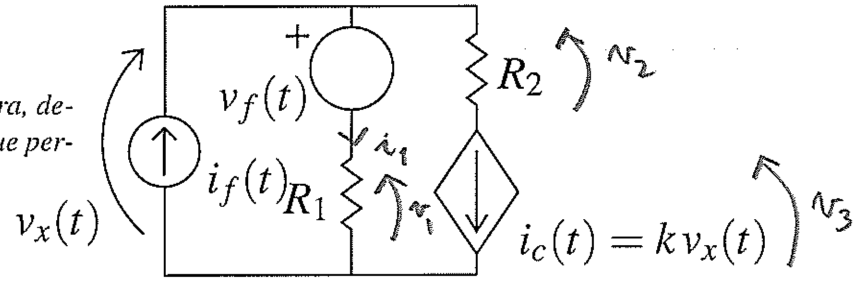
$\Rightarrow$ la respuesta por tanto es

$$r_2(t) = \left(\frac{1-e^{-4(t+1)}}{4}\right)\mu(t+1) - 2\left(\frac{1-e^{-4t}}{4}\right)\mu(t) + \left(\frac{1-e^{-4(t-1)}}{4}\right)\mu(t-1)$$

Gráficamente :



Problema 1.3 (10 puntos) *En la red de la figura, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



Solución

Definimos incognitas (variables o señales) en la figura

Entonces

$$\text{LCK}: \quad i_f(t) = i_1(t) + i_c(t)$$

$$\text{LVK}: \quad v_x(t) = v_f(t) + v_1(t)$$

$$v_x(t) = v_2(t) + v_3(t)$$

$$\text{III}: \quad v_1(t) = R_1\, i_1(t)$$

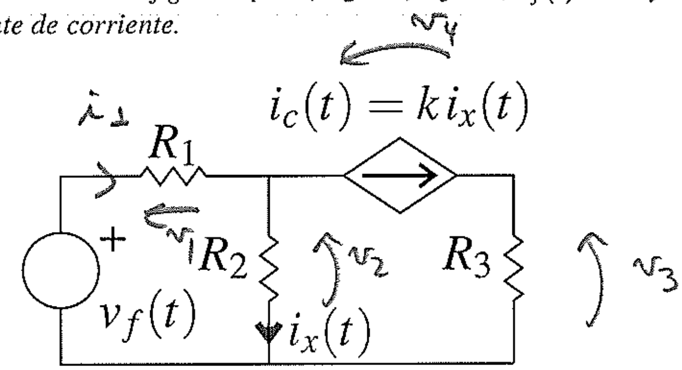
$$v_2(t) = R_2\, i_2(t)$$

$$i_c(t) = k\, v_x(t)$$

6 ecuaciones l.i.

6 incógnitas: i_1, i_2, i_c, v_1, v_2, v_3

Problema 1.4 (10 puntos) *En la red de la figura $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $R_3 = 3$, $v_f(t) = 12$ y $k = 1$. Determine la potencia entregada por la fuente de corriente.*



Solución

Definimos variables como en la figura

LCK: $i_1 = i_x + i_c$

LVK: $v_f = v_1 + v_2$

$v_2 = v_3 + v_4$

III: $v_1 = R_1 i_1$

$v_2 = R_2 i_x$

$v_3 = R_3 i_c$

$i_c = k\, i_x$

7 ecs.

7 incógnitas

i_1, i_x, i_c

v_1, v_2, v_3, v_4

III en LVK: $v_f = R_1 i_1 + R_2 i_x$

$R_2 i_x = R_3 i_c + v_4$

además $\left.\begin{array}{l} i_1 = i_x + i_c \\ i_c = k\, i_x \end{array}\right\} i_1 = (1+k)\, i_x$

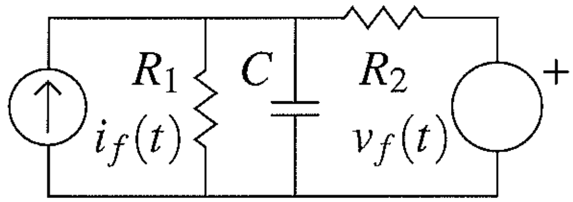
$\Rightarrow \quad v_f = \left(R_1(1+k) + R_2\right) i_x \quad \Rightarrow \quad i_x = \dfrac{v_f}{R_1(1+k)+R_2} = \dfrac{12}{1\cdot 2 + 2} = 3$ [A]

$\Rightarrow \quad i_c = k\, i_x = 3$ [A]

$\Rightarrow \quad R_2 i_x = R_3 i_c + v_4 \quad \Rightarrow \quad v_4 = R_2 i_x - R_3 i_c = 2\cdot 3 - 3\cdot 3 = -3$ [V]

$\therefore$ potencia entregada fuente de corriente es $p = -v_4 i_c = -(-3)3 = 9$ [W]

Problema 1.5 (10 puntos) *En la red de la figura $v_f(t) = V_f$ e $i_f(t) = I_f$ son fuentes constantes. Determine el voltaje en el condensador después de mucho rato, es decir, $v_C(\infty)$.*

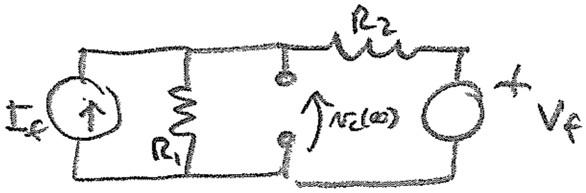


Solución

Dado que ambas fuentes son constantes, luego de "mucho rato" todas las señales de la red son constantes (estado estacionario)

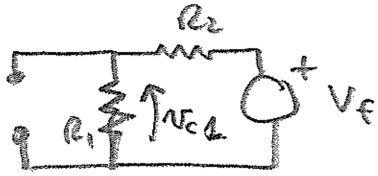
Esto implica que, en el condensador: $i(t) = C\underbrace{\frac{dv(t)}{dt}}_{0} = 0$

por tanto se comporta como un circuito abierto:



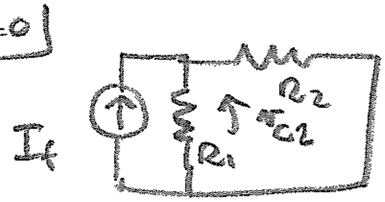
El voltaje $v_c(\infty)$ se puede obtener, por ejemplo, por superposición:

$I_f = 0$ |



$$\Rightarrow v_{c1} = \frac{R_1}{R_1+R_2}V_f$$

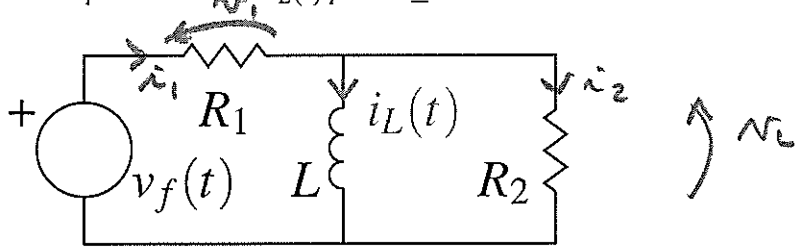
$V_f = 0$ |



$$\Rightarrow v_{c2} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}I_f$$

$$v_c(\infty) = v_{c1} + v_{c2} = \frac{R_1(V_f + R_2 I_f)}{(R_1+R_2)}$$

Problema 1.6 (10 puntos) *En la red de la figura $v_f(t) = V_f$ es una fuente constante y la condición inicial es $i_L(0) = 0$. Determine la corriente por el inductor $i_L(t)$ para $t \geq 0$.*



Solución

Eligiendo variables como en la figura, se tiene que

LVK $\quad v_f(t) = v_1(t) + v_L(t)$

LCK $\quad i_1(t) = i_L(t) + i_2(t)$

III $\quad v_1(t) = R_1 i_1(t)$

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$v_2(t) = R_2 i_2(t)$$

$$v_f(t) = V_f$$

III en LVK: $\quad V_f = R_1 i_1(t) + L \frac{di_L(t)}{dt}$

usando LCK: $\quad V_f = R_1 (i_L + i_2) + L \frac{di_L(t)}{dt}$

pero de III: $\quad i_2 = \frac{1}{R_2} v_L = \frac{L}{R_2} \frac{di_L}{dt}$

$\Rightarrow$ La EDO es: $\quad V_f = R_1 i_L + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) L \frac{di_L}{dt}$

$$\Rightarrow \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) L \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{V_f}{R_1}$$

sujeto a la c.i. $\quad i_L(0) = 0$

La solución de esta EDO es

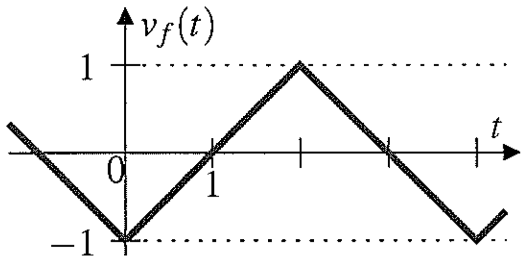
$$i_L(t) = i_L(\infty) + \left(i_L(0) - i_L(\infty) \right) e^{-t/\tau}$$

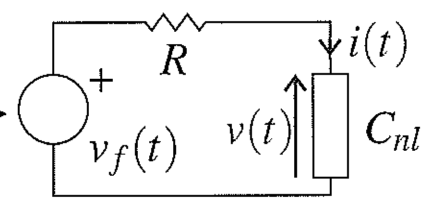
en que $i_L(0) = 0$

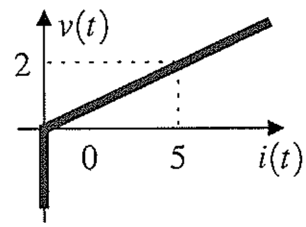
$i_L(\infty) = \dfrac{V_f}{R_1}$ $\left(\text{cuando } \dfrac{di_L}{dt} = 0 \right)$

y $\tau = \left(\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) L$ $\left(= \dfrac{L}{R_1 \| R_2} \right)$

Problema 1.7 (10 puntos) *En la red, $R = 5$, $v_f(t)$ está dada por la figura izquierda y la componente C_{nl} tiene la característica dada por la figura derecha. Grafique la corriente $i(t)$.*







Solución

De la característica de Cnl se aprecia que

si $v(t) < 0 \Rightarrow i(t) = 0$ es decir es un circuito abierto

y si $v(t) > 0 \Rightarrow v(t) = \frac{2}{5} i(t)$ es decir es una resistencia de $\frac{2}{5}$ [Ω]

Por tanto,

$$\text{si } v_f(t) < 0 \Rightarrow \begin{cases} v(t) = v_f(t) < 0 \\ i(t) = 0 \end{cases}$$

$$\text{y si } v_f(t) > 0 \Rightarrow v(t) = \frac{2/5}{5 + 2/5} v_f(t) = \frac{2}{27} v_f(t)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{5}{2} v(t) = \frac{5}{27} v_f(t)$$

Gráfica de $i(t)$