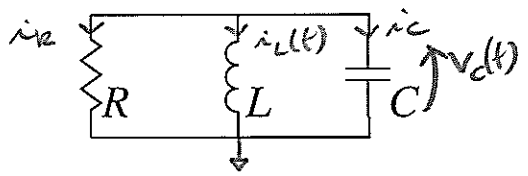
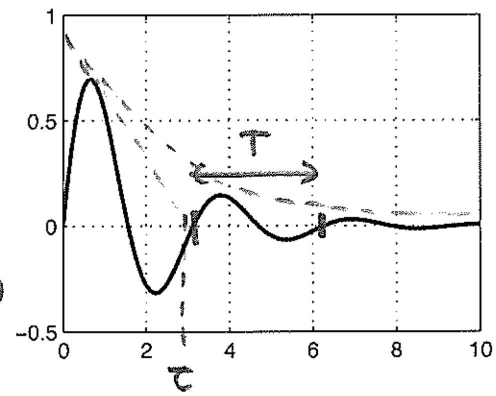
Certamen #2 – ELO102 – S1 2018

Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *La figura izquierda muestra una red RLC con condiciones iniciales en $t = 0$, y la figura derecha, el voltaje en el condensador para $t \geq 0$. Estime los valores de R, L, C, y de las condiciones iniciales.*





Solución

obtenemos la EDO para $v_c(t)$

$$\frac{v_c(t)}{R} + \frac{1}{L}\int v_c(t)\,dt + C\frac{dv_c}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2v_c}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{LC}v_c = 0}$$

las raíces de la ecuación característica son

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \underbrace{\frac{-1}{2RC}}_{-1/\tau} \pm j\underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}}_{\omega_{osc}}$$

De la figura $\tau \approx 3$

y $T \approx \pi \Rightarrow \omega_{osc} = \frac{2\pi}{T} = 2$

Además se observa que $v_c(0) = 0$

Note que $v_c'(0) > 0$ pero se cumple $\cancel{\frac{v_c(0)}{R}}^{0} + i_L(0) + C\,v_c'(0) = 0$

$$\Rightarrow i_L(0) = -C\,v_c'(0) < 0$$

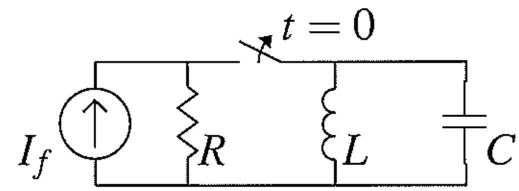
En Resumen: $\frac{1}{2RC} \approx \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \approx 4$$

$$v_c(0) = 0$$

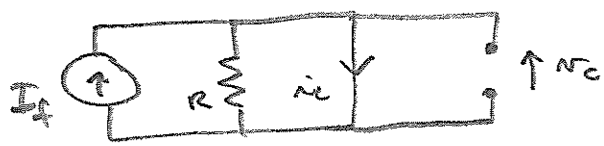
$$i_L(0) < 0$$

Problema 2.2 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente de corriente es constante, el interruptor ha estado cerrado hace mucho tiempo y se abre en $t = 0$. Haga un gráfico lo mas preciso posible del voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*



Solución

Las condiciones iniciales antes que se abre el interruptor se obtienen con el circuito equivalente:

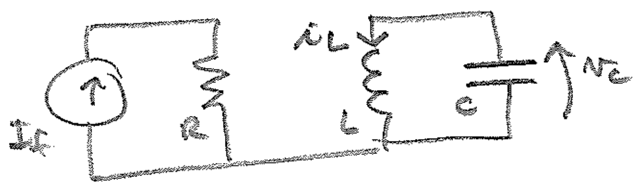


$\Rightarrow i_L(0) = I_f$

$v_c(0) = 0$

pues en cc o frecuencia $\omega = 0$ el inductor se comporta como un corto circuito y el condensador como un circuito abierto.

Para $t \geq 0$:

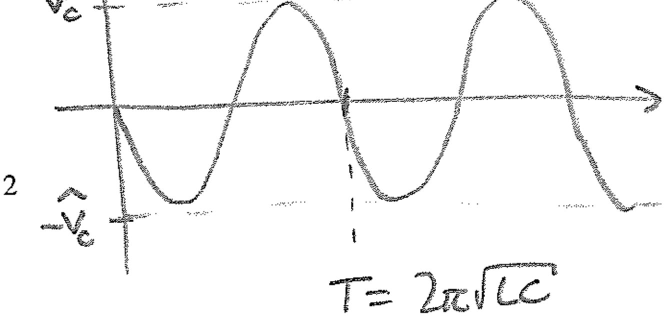


El circuito LC es un oscilador de frecuencia natural $\omega_{LC} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

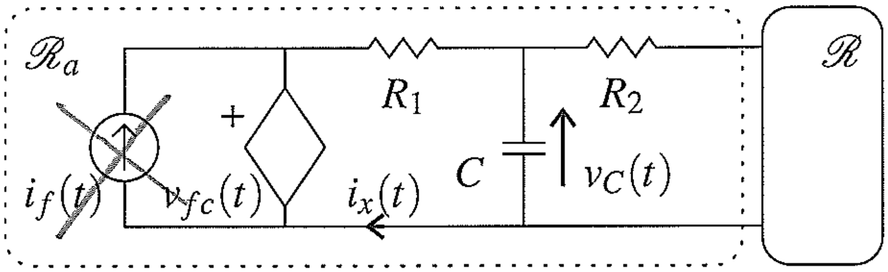
Por tanto $v_c(t) = A\cos(\omega_{LC}t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_{LC}t)$

pero las c.i. son $\begin{cases} v_c(0) = 0 & \Rightarrow \quad A = 0 \\ i_L(0) = -C\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = I_f & \Rightarrow \quad -\frac{I_f}{C} = B\omega_{LC} \end{cases}$

$$\Rightarrow v_c(t) = \underbrace{\frac{-I_f}{C\omega_{LC}}}_{-\hat{V}_c} \mathrm{sen}(\omega_{LC}t)$$



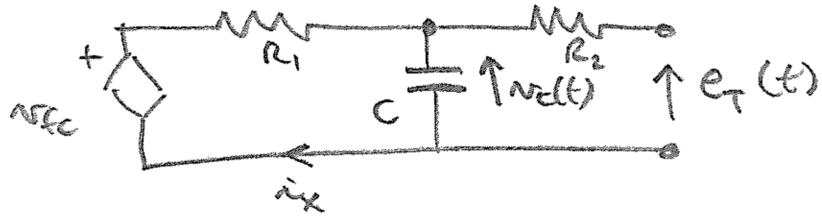
Problema 2.3 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_C(0) = V_o$, $v_{fc}(t) = k i_x(t)$ e $i_f(t) = I_f$ es una fuente constante. Determine el equivalente Thevenin de la red $\mathscr{R}_a$.*



Solución

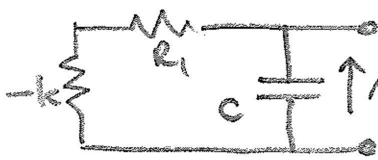
En primer lugar notamos que $i_f(t)$ es redundante con la fuente controlada $v_{fc}(t)$

1) calculamos la fuente Thévenin:



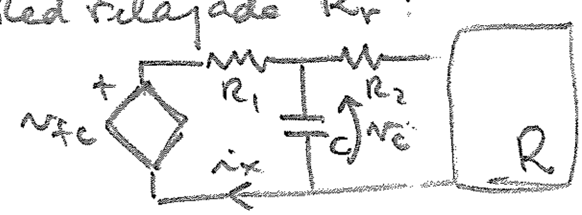
No hay corriente por R_2 por tanto $e_T(t) = v_C(t)$

$\hat{=}$

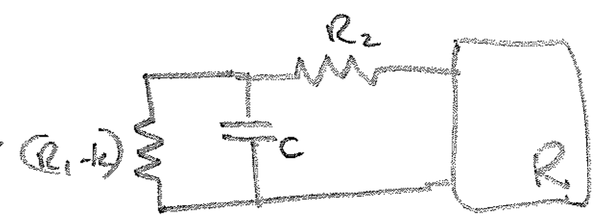


$v_C(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ en que $\tau = (R_1 - k)C$

2) Red relajada R_r:

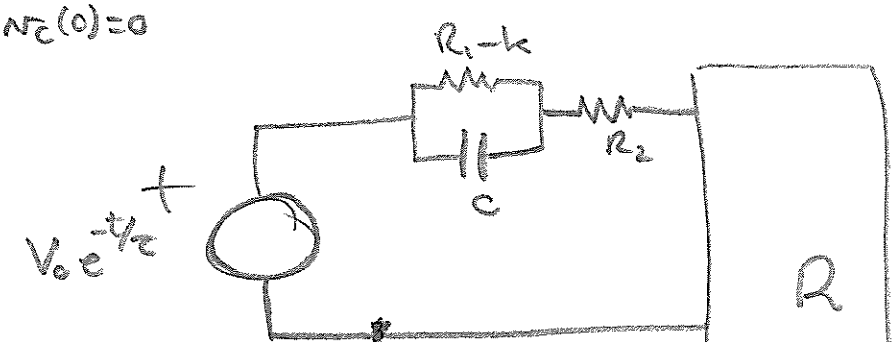


$\hat{=}$



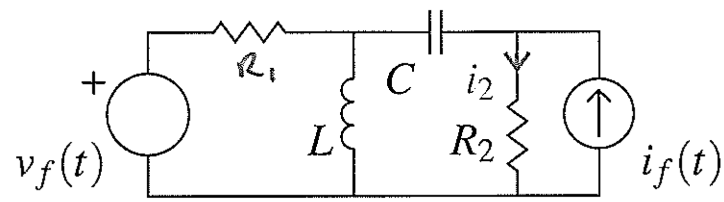
$v_C(0) = 0$

Thévenin:



$\tau = (R_1 - k)C$

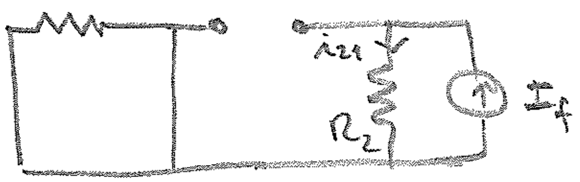
Problema 2.4 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_F(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ e $i_f(t) = I_f$ es una fuente constante. Determine $i_2(t)$ en estado estacionario.*



Solución

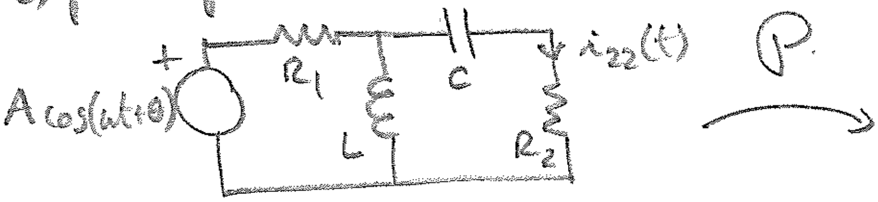
Las fuentes tienen diferente frecuencia $\Rightarrow$ se debe aplicar superposición: $i_2(t) = i_{21}(t) + i_{22}(t)$

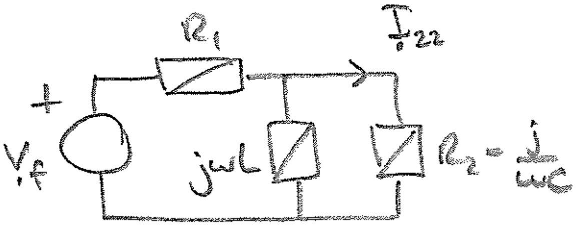
1) para frecuencia cero (continua):



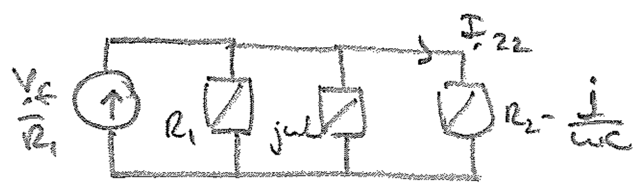
$\Longrightarrow \quad i_{21}(t) = I_f$

2) para frecuencia ω (alterna):





$\hat{=}$



Es un divisor de corrientes

$$\dot{I}_{22} = \frac{\frac{1}{R_2 - j/\omega C}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j/\omega C}} \cdot \frac{\dot{V}_f}{R_1}$$

$$= \frac{j\omega L \cdot \dot{V}_f}{j\omega L(R_2 - \frac{j}{\omega C}) + R_1(R_2 - \frac{j}{\omega C}) + R_1 j\omega L}$$

$$= \frac{j\omega^2 LC \cdot \dot{V}_f}{j\omega^2 LC R_2 + \omega L + R_1 R_2 \omega C - jR_1 + jR_1\omega^2 LC}$$

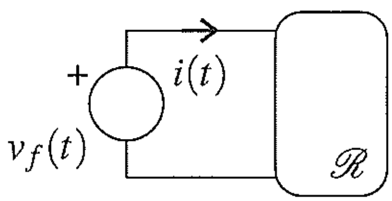
$$\dot{I}_{22} = \frac{\omega^2 LC \angle \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A}{\sqrt{2}} \angle \theta}{\sqrt{(\omega L + R_1 R_2 \omega C)^2 + (\omega^2 LC R_2 - R_1 + R_1 \omega^2 LC)^2} \angle \operatorname{Arctg}\left(\frac{\omega^2 LC R_2 - R_1 + R_1 \omega^2 LC}{\omega L + R_1 R_2 \omega C}\right)}$$

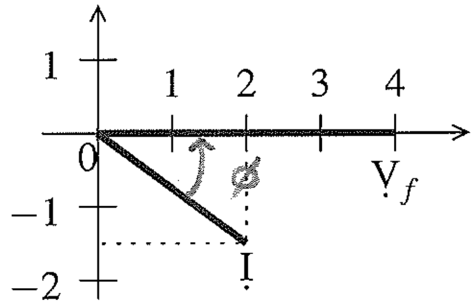
$$= \frac{A \ \omega^2 LC}{\sqrt{2}\sqrt{\%}} \angle \frac{\pi}{2} + \theta + \alpha$$

$$\Rightarrow i_{22}(t) = \frac{A \omega^2 LC}{\sqrt{\%}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \theta + \alpha\right)$$

$$\Rightarrow i_2(t) = I_f + \frac{A \omega^2 LC}{\sqrt{\%}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \theta + \alpha\right)$$

Problema 2.5 (10 puntos) *La figura muestra las tranformadas fasoriales del voltaje de la fuente conectada a la red $\mathscr{R}$ y la corriente entregada por dicha fuente Determine el factor de potencia que "ve" la fuente.*





Solución

El factor de potencia (FP) es

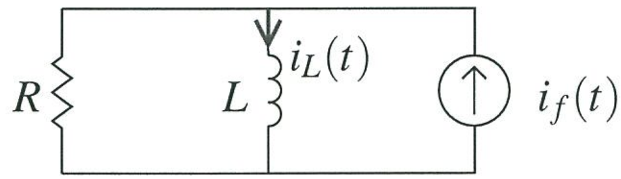
FP = $\cos\phi$ en que ϕ es el ángulo de la impedancia equivalente de la Red R

Es decir $\phi = \measuredangle \dot{V}_f - \measuredangle \dot{I}$

De la figura $\cos\phi = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+(1.5)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

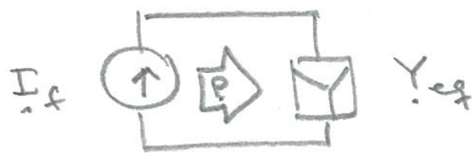
y dado que $\phi > 0$ (o que el voltaje adelanta a la corriente) es <u>inductivo</u>.

Problema 2.6 (10 puntos) *En la red de la figura, $R = 2[k\Omega]$, $L = 0{,}1[H]$ e $i_f(t) = 2\cos(20t)[mA]$ con $t[ms]$, y se encuentra en estado estacionario. Determine el potencia reactiva entregada por la fuente de corriente.*



Solución

En el dominio de la transformada fasorial



en que $\dot I_f = \frac{2}{\sqrt{2}} \angle 0 = \sqrt{2}$

y $\dot Y_{eq} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}$

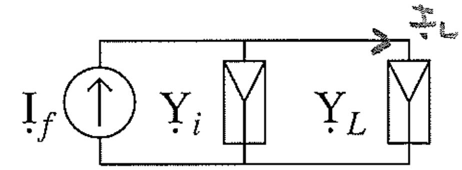
La potencia compleja aparente es

$$\dot P = \dot V \dot I^* = \frac{\dot I_f}{\dot Y_{eq}} \dot I_f^* = \frac{|\dot I_f|^2}{\frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}} = \frac{|\dot I_f|^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{j}{\omega L}\right)}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{|\dot I_f|^2}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2} \frac{1}{\omega L} = \frac{\cancel{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{20 \cdot 0.1}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cancel{(20 \cdot 0.1)}}$$

$$= 2 \ [mVAR]$$

Problema 2.7 (10 puntos) *La figura muestra una red en el dominio de la transformada fasorial en que I_f y $Y_i = G_i + jB_i$ son conocidas. Determine la admitancia de carga $Y_L = G_L + jB_L$ tal que la potencia activa absorbida por dicha admitancia sea máxima.*



Solución

Podemos calcular la potencia compleja aparente absorbida por Y_L calculando I_L:

$$I_L = \frac{Y_L}{Y_i + Y_L} I_f$$

$$\Rightarrow S = V I^* = \frac{I_L}{Y_L} I_L^* = \frac{|I_L|^2}{G_L + jB_L} = \frac{|I_L|^2}{G_L^2 + B_L^2}(G_L - jB_L)$$

$$\Rightarrow P_{ac} = \mathrm{Re}\{S\} = \frac{|I_L|^2}{G_L^2 + B_L^2} G_L = \frac{|I_f|^2 G_L}{(G_i+G_L)^2 + (B_i+B_L)^2}$$

Para maximizar hacemos $\nabla P_{ac} = 0$ (con respecto a G_L y B_L)

$$\frac{\partial P_{ac}}{\partial B_L} = \frac{-|I_f|^2 G_L}{[(G_i+G_L)^2 + (B_i+B_L)^2]^2} \cdot 2(B_i+B_L) = 0 \Rightarrow \boxed{B_L = -B_i}$$

$$\frac{\partial P_{ac}}{\partial G_L} = \frac{|I_f|^2\left((G_i+G_L)^2 + \overset{0}{\cancel{(B_i+B_L)^2}} - G_L(2(G_i+G_L))\right)}{[(G_i+G_L)^2 + \underbrace{\cancel{(B_i+B_L)^2}}_{0}]^2} = \frac{|I_f|^2 (G_i+G_L)(G_i-G_L)}{[\quad \% \quad]^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{G_L = G_i}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_L = G_i - jB_i} = Y_i^*$$