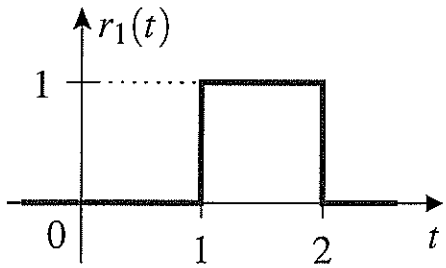
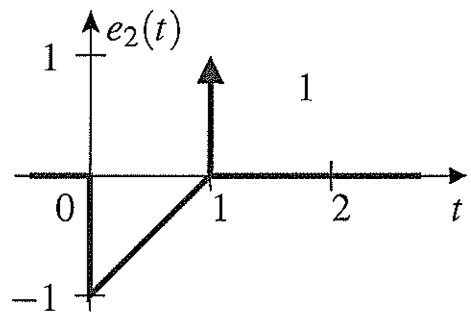
Certamen #1 – ELO102 – S2 2018

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *Considere un sistema lineal e invariante en el tiempo talque, cuando la excitación es $e_1(t) = \mu(t)$ un escalón unitario con condiciones iniciales cero, la respuesta es la señal $r_1(t)$ que se muestra en la figura izquierda. Determina la respuesta $r_2(t)$ del sistema cuando la excitación es $e_2(t)$ que se muestra en la figura derecha (con condiciones iniciales cero).*





Solución

Si $e_1 = \mu(t) \longrightarrow \boxed{S \;\; \text{c.i.}=0} \longrightarrow r_1(t) = \mu(t-1) - \mu(t-2)$

Note que $e_2(t) = -\mu(t) + \text{rampa}(t) - \text{rampa}(t-1) + \delta(t-1)$

Por tanto, como el sistema es LTI, la respuesta a cada parte de $e_2(t)$ puede obtenerse escalando, integrando, derivando y desplazando. Esto es

si $e(t) = -\mu(t) \Rightarrow r(t) = -\mu(t-1) + \mu(t-2)$

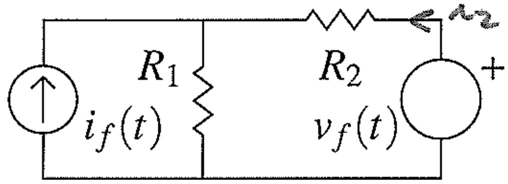
si $e(t) = \text{rampa}(t) \Rightarrow r(t) = \text{rampa}(t-1) - \text{rampa}(t-2)$

si $e(t) = -\text{rampa}(t-1) \Rightarrow r(t) = -\text{rampa}(t-2) + \text{rampa}(t-3)$

si $e(t) = \delta(t-1) \Rightarrow r(t) = \delta(t-2) - \delta(t-3)$

$$\Rightarrow r_2(t) = -\mu(t-1) + \mu(t-2) + \text{rampa}(t-1) - 2\,\text{rampa}(t-2) + \text{rampa}(t-3) + \delta(t-2) - \delta(t-3)$$

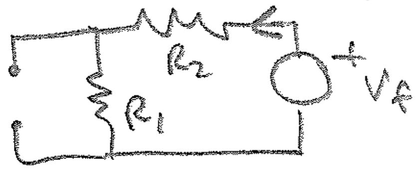
Problema 1.2 (10 puntos) *En la red de la figura $v_f(t) = V_f$ es una fuente constante e $i_f(t) = I_f \cos(\omega t)$ es una fuente sinusoidal. Determine la potencia promedio entregada por la fuente de voltaje.*



Solución

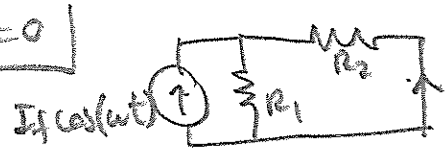
- Para determinar la potencia entregada por v_f se requiere calcular $i_2(t)$ pues $p(t) = v_f(t) i_2(t)$ es la potencia instantánea entregada
- $i_2(t)$ puede obtenerse por superposición:

$\underline{i_f(t) = 0}$ $\quad i_{21} \Rightarrow \quad i_{21}(t) = \dfrac{V_f}{R_1 + R_2}$



(división de corriente)

$\underline{v_f(t) = 0}$



$\Rightarrow \quad i_{22}(t) = \dfrac{-R_1 I_f}{R_1 + R_2} \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow p(t) = v_f(t)\left(i_{21}(t) + i_{22}(t)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{V_f^2}{R_1 + R_2}} - \frac{R_1 I_f V_f}{R_1 + R_2} \cos(\omega t)$$

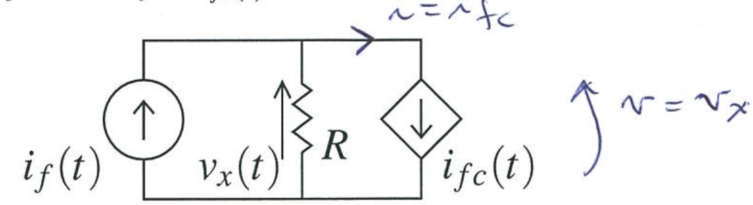
¡Sinusoide + Constante!

$$\bar{p} = \frac{V_f^2}{R_1 + R_2}$$

Problema 1.3 (10 puntos) *En la red de la figura,* $R = 0{,}5$, $i_f(t) = 3 + a\cos(\omega t)$ *en que* $a << 1$, *y la fuente controlada está definida por*

$$i_{fc}(t) = \begin{cases} 0 & ; v_x(t) \leq 0 \\ (v_x(t))^2 & ; v_x(t) > 0 \end{cases}$$

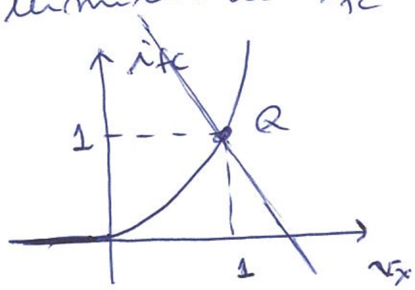
Determine una expresión aproximada para $i_{fc}(t)$.



Solución

(La fuente controlada no lineal es como una resistencia no lineal)

La característica terminal de i_{fc} es



mientras que el resto de la red tiene una característica

$i(t) = i_f(t) - \frac{1}{R} v(t) \Rightarrow$ Si $i_f(t) = i_{fQ} = 3$

y $R = 1/2$

$\Rightarrow i(t) = 3 - 2v(t)$

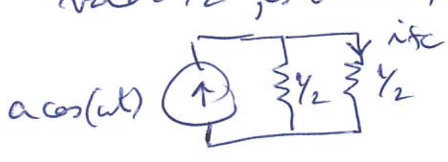
Graficando se aprecia que el punto de intersección/operación es

el punto $Q = \begin{cases} i_Q = i_{fcQ} = 1 \\ v_Q = v_{xQ} = 1 \end{cases}$

Linealizamos para análisis a pequeña señal en este punto

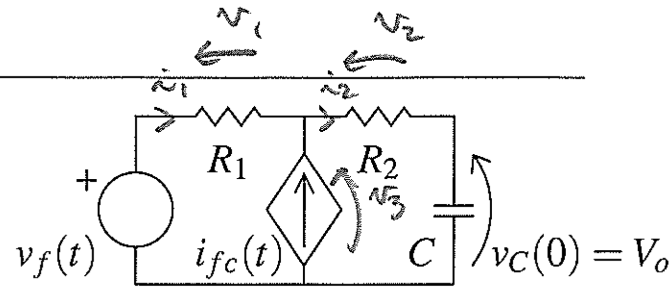
$$\Delta i_{fc} = \left.\frac{\partial i_{fc}}{\partial v_x}\right|_Q \Delta v_x \quad \text{en que} \quad \left.\frac{\partial i_{fc}}{\partial v_x}\right|_Q = \left.2v_x\right|_Q = 2$$

$\Rightarrow$ Es una conductancia de valor 2 o bien una resistencia de valor $1/2$; es decir, a pequeña señal:



$$\Rightarrow i_{fc}(t) = i_{fcQ} + \Delta i_{fc}(t) = 1 + \frac{a}{2}\cos(\omega t)$$

Problema 1.4 (10 puntos) *En la red de la figura, $i_{fc}(t) = kv_C(t)$. Determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



Solución

Definimos variables como en la figura:

LVK: $v_f = v_1 + v_3$

$v_3 = v_2 + v_C$

LCK: $i_1 = i_{fc} + i_2$

III: $v_1 = R_1 i_1$

$v_2 = R_2 i_2$

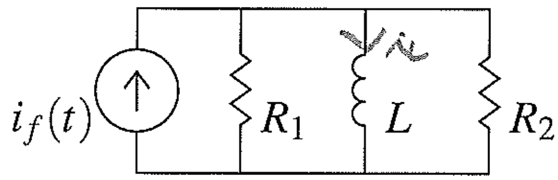
$i_2 = C \frac{dv_C}{dt}$

$i_{fc} = k v_C$

7 ecuaciones l.i. (

7 incógnitas: $\{ i_1, i_2, i_{fc}, v_1, v_2, v_3, v_{fc} \}$

Problema 1.5 (10 puntos) *En la red de la figura, la fuente $i_f(t) = I_f$ es constante y las condiciones iniciales son cero. Grafique el voltaje en la fuente para $t > 0$.*



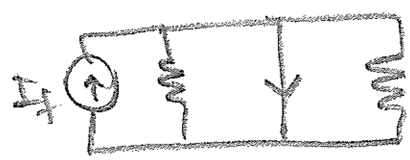
Solución

Definimos $i_L(t)$ como en la red, entonces podemos usar la expresión

$$i_L(t) = (i_L(0) - i_L(\infty))\, e^{-t/\tau} + i_L(\infty)$$

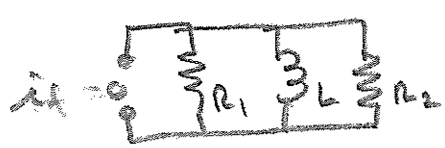
en que $i_L(0) = 0$ (dato)

$i_L(\infty)$ se obtiene considerando $v_L = L\frac{di_L}{dt} \to 0$ en e.e.



$$\Rightarrow i_L(\infty) = I_f$$

y τ se obtiene, por ejemplo, analizando el caso sin fuente



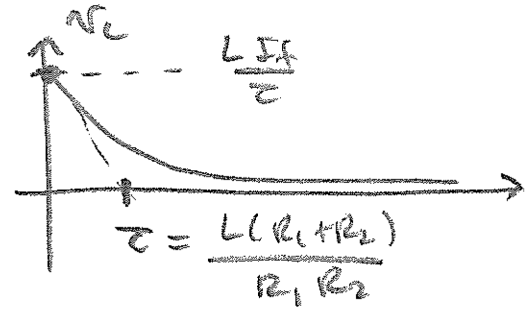
L se "descarga" a través de $R_1 \| R_2$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R_1 \| R_2} = \frac{L}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

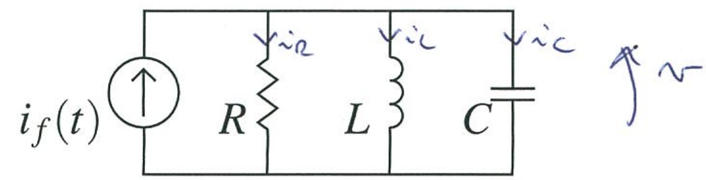
finalmente $v_L = L\frac{di_L}{dt}$ es el voltaje en el inductor y en la fuente.

$$v_L = L\frac{d}{dt}\left(I_f\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right)$$

$$= \frac{L I_f}{\tau} e^{-t/\tau}$$



Problema 1.6 (10 puntos) *En la red de la figura $R = 1[k\Omega]$, $C = 1[\mu F]$, $L = 1[H]$, $i_f(t) = 1[mA]$ y las condiciones iniciales en $t = 0$ son cero. Haga un gráfico cualitativamente correcto del voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*



Solución

Definimos variables como en la figura.

LCK: $i_f = i_R + i_L + i_C$

LVK: —

III: $v = R\, i_R$

$i_C = C\frac{dv}{dt}$

$v = L\frac{di_L}{dt}$

EDO para $v(t)$: $i_f = \frac{v}{R} + i_L + C\frac{dv}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di_f}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v + C\frac{d^2v}{dt^2}}$$

Reemplazando los valores $R = L = C = 1$ (t en [ms])

se obtiene la ecuación característica:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La solución es de la forma

$$v(t) = A e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi\right)$$

pero $v(0) = 0$

$v(\infty) = 0$ (pues L es un cable)