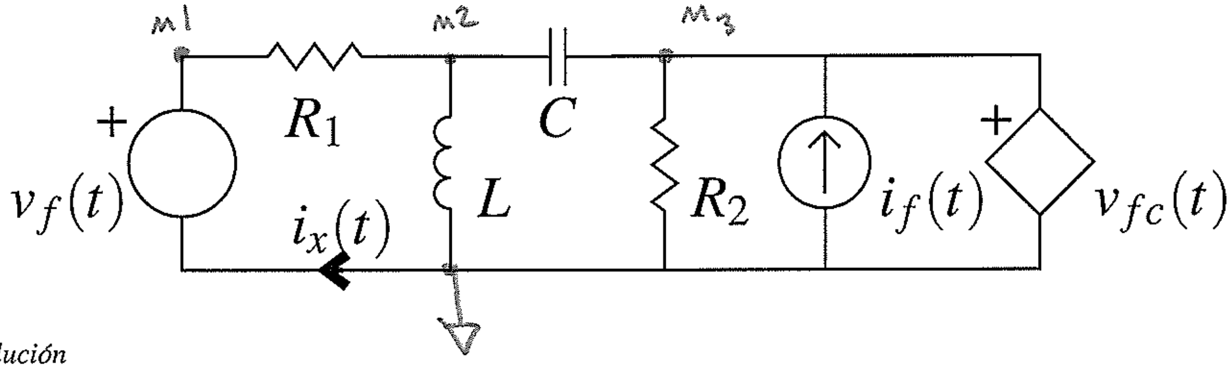
Certamen #2 – ELO102 – S2 2018

Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_{fc}(t) = k\,i_x(t)$. Aplicando voltajes de nodos o corrientes de malla, determine un sistema consistente de ecuaciones que permita analizar la red.*



Solución

Voltajes de nodo: dos voltajes están dados por las fuentes de voltaje

$v_{n1} = v_f$ (dato)

$v_{n3} = v_{fc} = k\,i_x$

LCK en n_2:

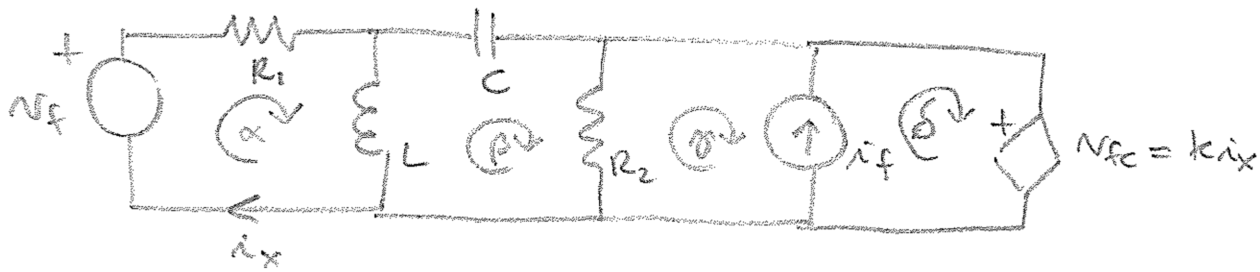
$$\frac{v_{n2} - v_f}{R_1} + \frac{1}{L}D^{-1}v_{n2} + CD(v_{n2} - v_{fc}) = 0$$

$$v_{fc} = k\,i_x$$

$$i_x = \frac{v_{n2} - v_f}{R_1}$$

3 ecs / 3 incógnitas

Por corrientes de malla:



LVK en α: $R_1 i_\alpha + LD(i_\alpha - i_\beta) = v_f$

en β: $LD(i_\beta - i_\gamma) + \frac{1}{C} D^{-1} i_\beta + R_2 (i_\beta - i_\gamma) = 0$

además

$$-i_\gamma + i_\delta = i_f$$

$$R_2(i_\beta - i_\gamma) = v_{fc}$$

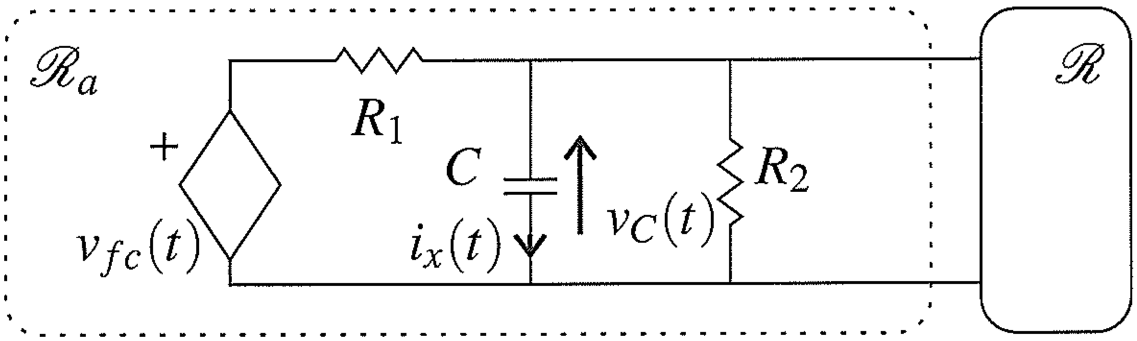
$$v_{fc} = k\, i_x$$

$$i_x = i_\alpha$$

6 ecuaciones /

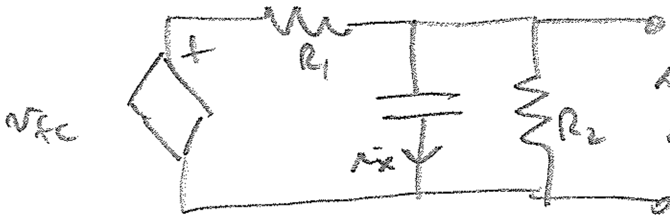
6 incógnitas: $\{ i_\alpha, i_\beta, i_\gamma, i_\delta, v_{fc}, i_x \}$

Problema 2.2 (10 puntos) *En la red de la figura,* $v_C(0) = V_o$, $v_{fc}(t) = k\,i_x(t)$. *Determine el equivalente Thevenin de la red* $\mathscr{R}_a$.



Solución

Fuente Thévenin: se calcula el voltaje de circuito abierto, que muestra el efecto de la c.i.



$v_{ca}(t) = e_T(t) = v_C(t)$

$$\frac{v_C - v_{fc}}{R_1} + i_x + \frac{v_C}{R_2} = 0$$

$$v_{fc} = k\,i_x$$

$$i_x = C\,\frac{dv_C}{dt}$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_C + \left(1 - \frac{k}{R_1}\right) C \frac{dv_C}{dt} = 0$$

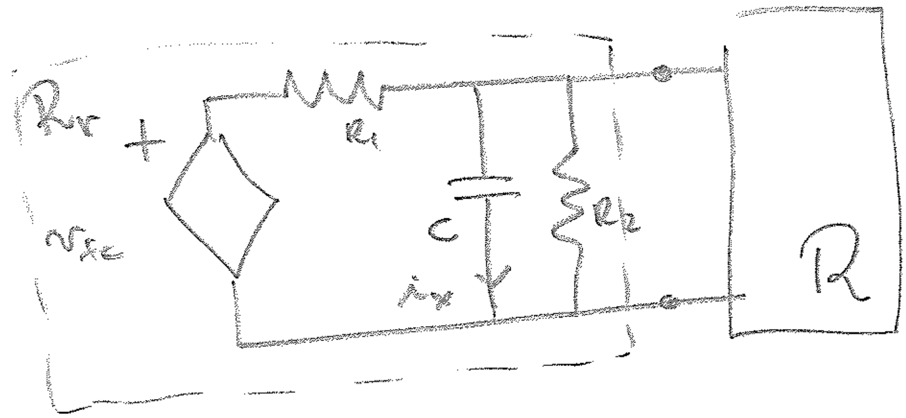
$$\Rightarrow \quad v_C(t) = \left(v_C(0) - v_C(\infty)\right) e^{-t/\tau} + v_C(\infty)$$

en que $\quad v_C(0) = V_o$ (dato)

$v_C(\infty) = 0$ no hay fuente (y si $k < R_1$)

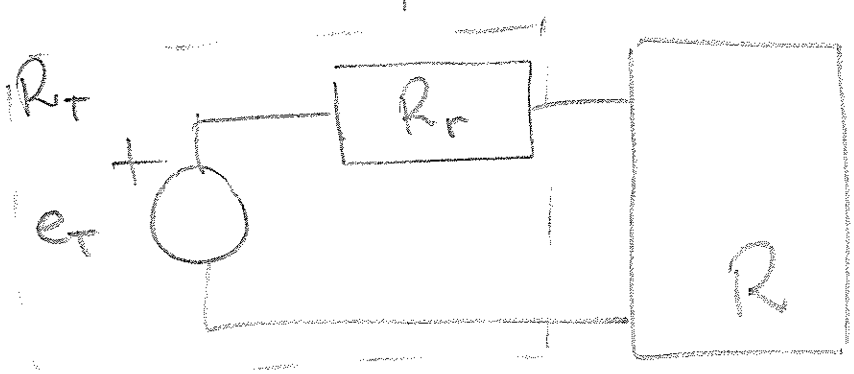
$$\tau = \frac{R_2(R_1 - k)}{R_1 + R_2}\, C > 0$$

Para la red R_T del equivalente thévenin se hace cero la condición inicial

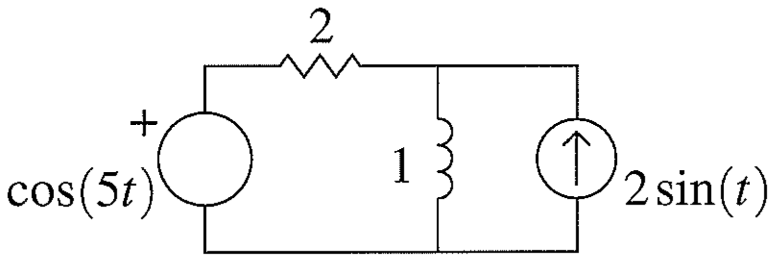


la cual NO puede simplificarse más

Por tanto, el equivalente thévenin es



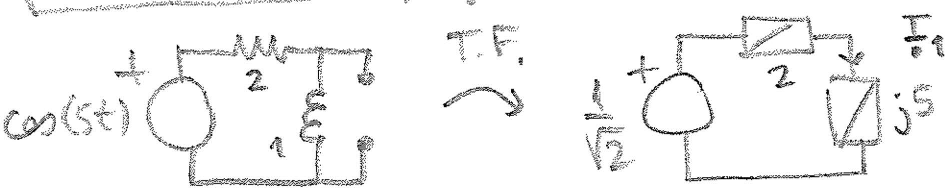
Problema 2.3 (10 puntos) *En la red de la figura, determine la corriente por el inductor en estado estacionario.*



Solución

Las fuentes son de diferente frecuencia por tanto DEBE aplicarse superposición para poder usar la transformada fasorial:

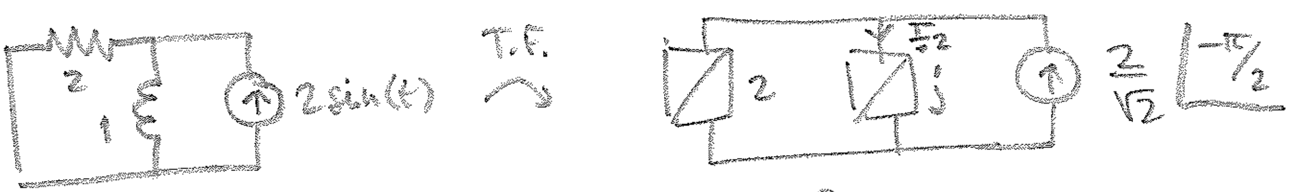
para $\omega = 5$ | Apagamos la fuente de corriente



$$\dot{I}_1 = \frac{1/\sqrt{2}}{2+j5}$$

por tanto $i_1(t) = \frac{1}{\sqrt{4+25}}\cos\left(5t - \text{Arctg}\left(\frac{5}{2}\right)\right)$

para $\omega = 1$ | Apagamos la fuente de voltaje

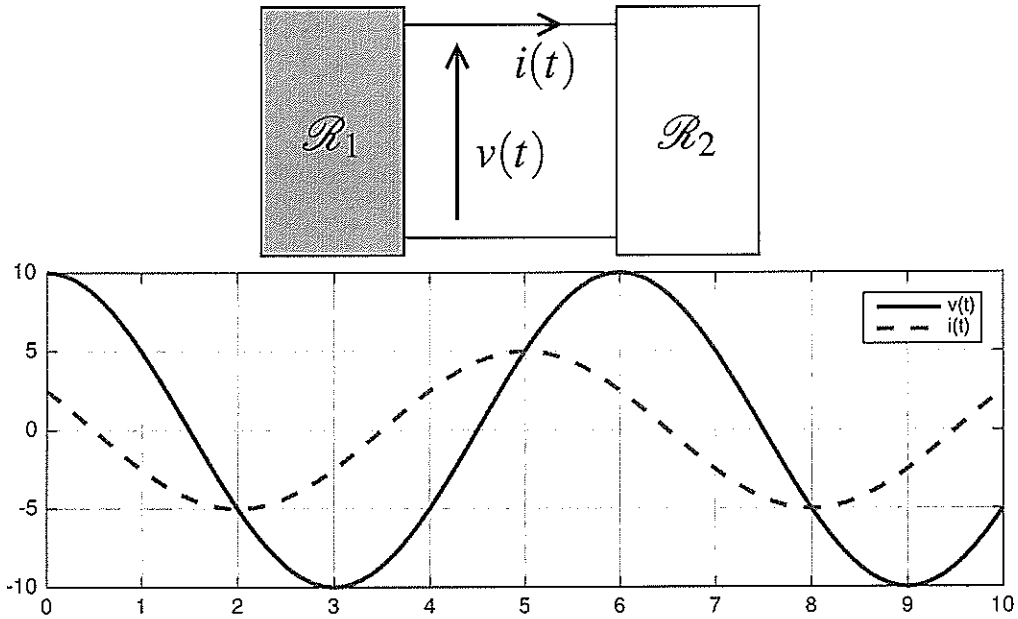


$$\Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{2}{2+j}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\angle -\pi/2$$

$$\Rightarrow i_2(t) = \frac{4}{\sqrt{4+1}}\cos\left(t - \pi/2 - \text{Arctg}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow i_L(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

Problema 2.4 (10 puntos) *La figura muestra el voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ en estado estacionario en el puerto de conexión de las redes. Proponga una red $\mathscr{R}_1$ y una red $\mathscr{R}_2$ que correspondan a dichas mediciones.*



Solución

Del gráfico se aprecia que

$$v(t) = 10 \cos\left(\frac{2\pi}{6} t\right) \qquad \omega = \frac{\pi}{3} \approx 1$$

e

$$i(t) = 5 \cos\left(\frac{2\pi}{6}(t-5)\right)$$

$$= 5 \cos\left(\frac{2\pi}{6} t - \frac{10\pi}{6}\right)$$

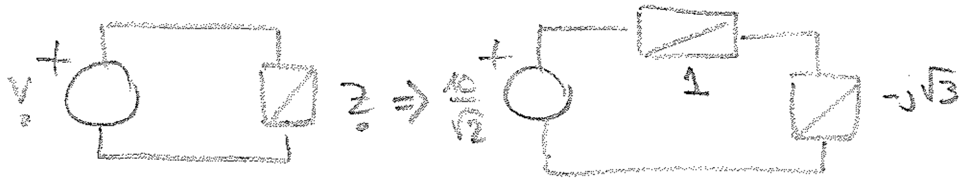
$$= 5 \cos\left(\frac{2\pi}{6} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dot{V} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle 0 \\ \dot{I} = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{3} \end{array}\right\} \quad \dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}} = 2 \angle -\pi/3 = 1 - \sqrt{3} j$$

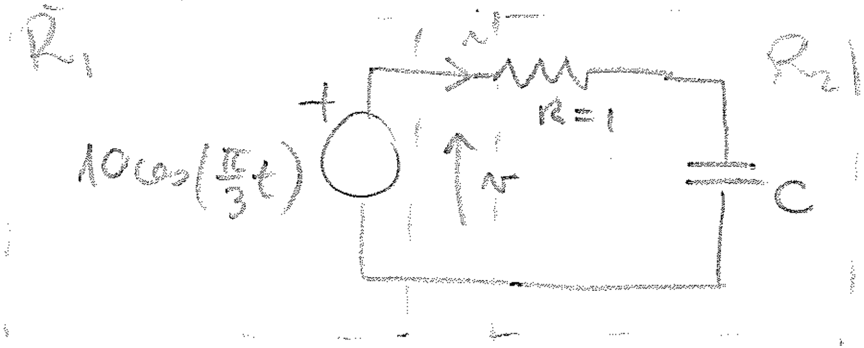
Por tanto $\mathscr{R}_1$ puede ser una fuente de voltaje $\dot{V}$
o de corriente $\dot{I}$

y $\mathscr{R}_2$ es una impedancia $\dot{Z}$ que es RC

Es decir,



que corresponde a las redes

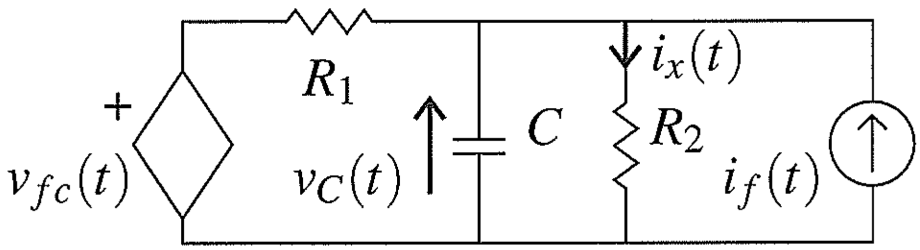


en que

$$\frac{-j}{\omega C} = -\sqrt{3},$$

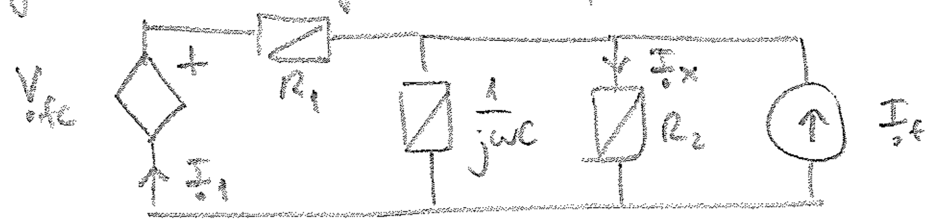
$$C = \frac{1}{\sqrt{3}\,\omega} = \frac{3}{\sqrt{3}\,\pi}$$

Problema 2.5 (10 puntos) *En la red de la figura,* $i_f(t) = \cos(\omega t)$. *Determine la potencia promedio entregada por la fuente de voltaje en estado estacionario.* Fuente controlada $\boxed{v_{fc}(t) = k\, i_x(t)}$

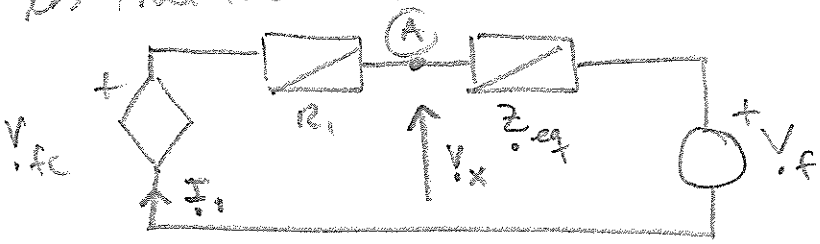


Solución

La red puede analizarse en el dominio de la transformada fasorial (suponiendo que existe el e.e.)



Para el cálculo de potencia se requiere $\dot{V}_{fc}$ e $\dot{I}_1$. Para obtenerlos se pueden usar equivalencias (o alguno de los métodos: nodos o mallas)



en que

$$\dot{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C}$$

$$\dot{V}_f = \dot{I}_f \dot{Z}_{eq}$$

y la dependencia de $\dot{V}_{fc} = k\,\dot{I}_x = \frac{k}{R_2}\dot{V}_x$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{V}_x - \dot{V}_{fc}}{R_1} + \frac{\dot{V}_x - \dot{V}_f}{\dot{Z}_{eq}} = 0 \quad (\text{LCK en A})$$

pero $\dot{V}_{fc} = \frac{k}{R_2}\dot{V}_x$

$$\Rightarrow \quad \dot{V}_{fc}\left[\frac{\left(\frac{R_2}{k}-1\right)}{R_1}+\frac{\frac{R_2}{k}}{\dot{Z}_{eq}}\right]=\frac{+\dot{V}_f}{\dot{Z}_{eq}}$$

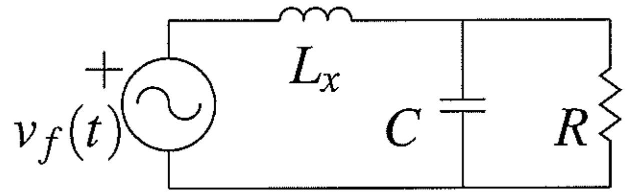
$$\dot{V}_{fc}=\frac{+R_1\,\dot{V}_f}{\left(\frac{R_2}{k}-1\right)\dot{Z}_{eq}+\frac{R_1 R_2}{k}}$$

mientras que $\quad \dot{I}_1=\dfrac{\dot{V}_{fc}-\dot{V}_f}{R_1+\dot{Z}_{eq}}$

$$\Rightarrow \quad \dot{P}_{ap}=\dot{V}_{fc}\;\dot{I}_1^{\,*}=\dot{V}_{fc}\left(\frac{\dot{V}_{fc}^{\,*}-\dot{V}_f^{\,*}}{R_1+\dot{Z}_{eq}^{\,*}}\right)$$

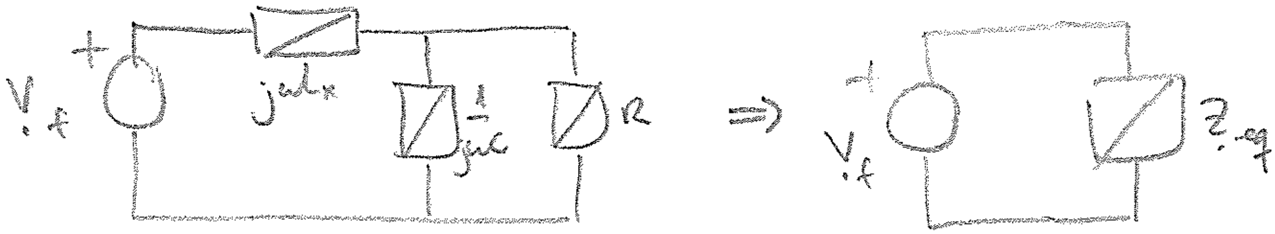
y la potencia promedio estará dada por su parte real $\quad \bar{P}=P_{ac}=\mathrm{Re}\{\dot{P}_{ap}\}$

Problema 2.6 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t)$ es una sinusoide de $220[V_{RMS}]$ y $50[Hz]$, mientras que $R = 1[k\Omega]$ y $C = 470[\mu F]$. Estime el valor de L_x tal que el factor de potencia desde los terminales de la fuente sea* ***máximo****.*



Solución

en el dominio de la transformada fasorial



en que $\underset{\sim}{Z}_{eq} = j\omega L_x + \dfrac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C}$

el F.P. es máximo si $\underset{\sim}{Z}_{eq}$ es real

es decir si $\operatorname{Im}\{\underset{\sim}{Z}_{eq}\} = 0$ es decir si $\measuredangle \underset{\sim}{Z}_{eq} = 0$

Por tanto $\underset{\sim}{Z}_{eq} = j\omega L_x + \dfrac{\frac{1}{R} - j\omega C}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\{\underset{\sim}{Z}_{eq}\} = \omega L_x - \frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} = 0 \Leftrightarrow L_x = \frac{C}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}$$

$$L_x = \frac{470 \times 10^{-6}}{10^{-6} + (100\pi \cdot 470\ 10^{-6})^2} = \frac{470}{1 + (\pi\ 47)^2} \approx \frac{10}{\pi^2 47} \approx \frac{1}{47} \approx 0.02$$