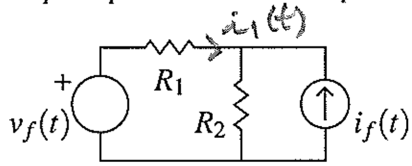
Certamen #1 – ELO102 – S1 2019

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *En la red de la figura*

$$R_1 = 10[\Omega] \quad R_2 = 5[\Omega] \quad v_f(t) = 10\cos(2\pi t)[V] \quad i_f(t) = -1[A]$$

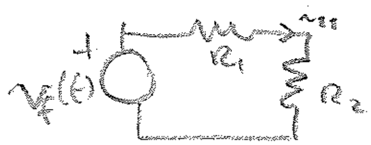
Determine la potencia promedio disipada por la resistencia R_1.



Solución

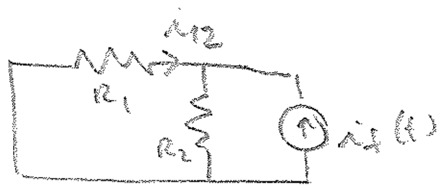
Calculamos en primer lugar la corriente (o el voltaje) por R_1:

superposición: si $i_f = 0$, entonces



$$\Rightarrow i_{11}(t) = \frac{v_f(t)}{R_1+R_2}$$

si $v_f = 0$, entonces



$$\Rightarrow i_{12}(t) = \frac{-R_2}{R_1+R_2}\, i_f(t)$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_{11}(t) + i_{12}(t) \\ &= \frac{v_f(t) - R_2 i_f(t)}{R_1+R_2} \\ &= \frac{10\cos(2\pi t) + 5}{15} = \frac{2}{3}\cos(2\pi t) + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

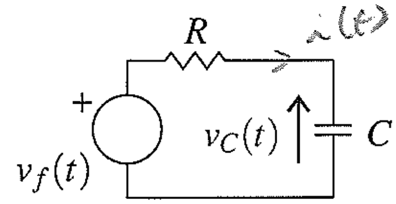
$\Rightarrow p_1(t) = R_1 i_1^2(t)$ es la potencia instantánea disipada por R_1

$$= 10\left(\frac{4}{9}\cos^2(2\pi t) + \frac{4}{9}\cos(2\pi t) + \frac{1}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{P_1} = \frac{1}{T}\int_0^T p_1(t)\,dt = \frac{40}{9}\cdot\frac{1}{2} + \frac{40}{9}\cdot 0 + \frac{10}{9} = \frac{30}{9} = 1{,}\bar{3}\ [W]$$

-1

Problema 1.2 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = V_f\delta(t)$ y el condensador se encuentra inicialmente descargado. Determine $v_C(t)$, para $t \geq 0$.* Sugerencia: *recuerde que la red es un sistema lineal e invariante en el tiempo.*



Solución

Dado que la red es un SLIT, podemos primero calcular su respuesta a escalón (con c.i. cero) y luego derivar para obtener su respuesta a impulso (también con c.i. iguales a cero)

$V_f\mu(t-1) \longrightarrow$ [RC, $v_C(0)=0$] $\longrightarrow r(t)$ $\Longrightarrow$ $V_f\delta(t-1) \longrightarrow$ [RC, $v_C(0)=0$] $\longrightarrow \frac{d}{dt}(r(t))$

La ecuación que relaciona $v_f(t)$ con $r(t) = v_C(t)$ es

$$v_f(t) = R\,i(t) + v_C(t)$$

$$\Longrightarrow \boxed{v_f(t) = RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)}$$

$\Longrightarrow$ Si $v_f(t) = V_f\mu(t-1)$ es una constante que comienza a aplicarse en $t = 1$

$$\Longrightarrow v_C(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 1 \\ v_C(\infty) + (v_C(1) - v_C(\infty))\,e^{-\frac{(t-1)}{\tau}} & ; t \geq 1 \end{cases}$$

en que $v_C(\infty) = V_f$ pues el condensador se carga al voltaje de la fuente.

$$v_C(1) = 0$$

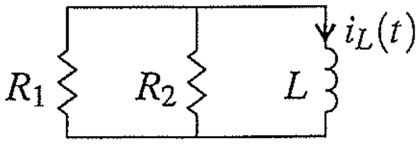
y $\tau = RC$

$$\Longrightarrow \text{Si } v_f(t) = V_f\delta(t-1) \Longrightarrow v_C(t) = \begin{cases} 0 & ; t < 1 \\ -v_C(\infty)\left(\frac{-1}{\tau}\right)e^{-\left(\frac{t-1}{\tau}\right)} & ; t \geq \end{cases}$$

Problema 1.3 (10 puntos) *En la red de la figura*

$$R_1 = 1[k\Omega] \quad R_2 = 2[k\Omega] \quad L = 0{,}1[H] \quad i_L(0) = 10[mA]$$

Determine la energía total disipada por R_2 en el lapso $[0, \infty)$



Solución

La energía TOTAL inicial es la almacenada en el inductor, es decir: $E_L(0) = \frac{1}{2} L\, i_L^2(0)$

$$= \frac{1}{2}\, 0.1\, (10)^2 = 5\, [\mu J$$

pues $\frac{V}{mA/ms} \cdot (mA)^2$

$V \cdot ms \cdot mA = \mu$

Las resistencias disipan dicha energía pero las corrientes por ellas están en la proporción

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R_2}{R_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{P_{R1}}{P_{R2}} = \frac{i_1^2 R_1}{i_2^2 R_2} = (2)^2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

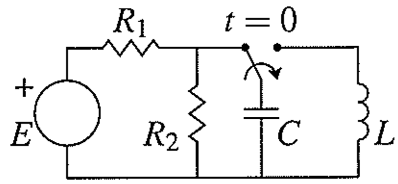
es decir, la resistencia R_1 disipa (instantáneamente) DOS veces más potencia que R_2 y por tanto, en cualquier intervalo de tiempo R_1 disipará DOS veces la energía de R_2

$$\Rightarrow \quad \frac{E_{R1}}{E_{R2}} = 2 \quad y \quad E_{R1} + E_{R2} = 5\, [\mu J]$$

$$\Rightarrow \quad E_{R1} = 5 \cdot \frac{2}{3}\, [\mu J]$$

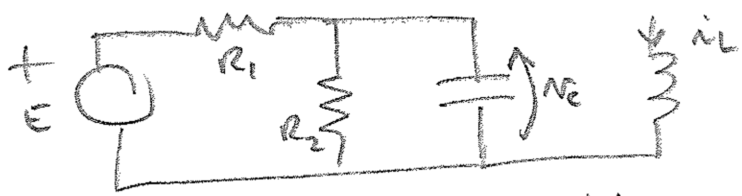
$$y \quad E_{R2} = 5 \cdot \frac{1}{3}\, [\mu J]$$

Problema 1.4 (10 puntos) *La red de la figura, la fuente de voltaje es constante y está funcionando* hace mucho tiempo. *Si en $t = 0$ el interruptor se cambia de posición, determine la corriente por el inductor para $t \geq 0$.*



Solución

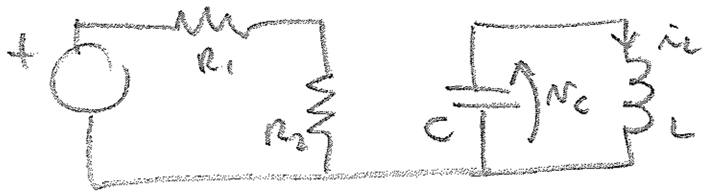
Antes que el switch cambie de posición tenemos la red



La fuente es constante y el circuito opera "hace mucho" tiempo $\Rightarrow v_C(0) = \dfrac{E \cdot R_2}{R_1 + R_2} = V_0$

Además $i_L(0) = 0$

Después que el switch cambia de posición (en $t=0$) tenemos:



Es decir, la red a la derecha es un circuito LC con condiciones iniciales. Se comporta como un oscilador.

$v_C(t) = A\cos(\omega_{LC} t) + B\,\text{sen}(\omega_{LC} t)$ en que $\omega_{LC} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

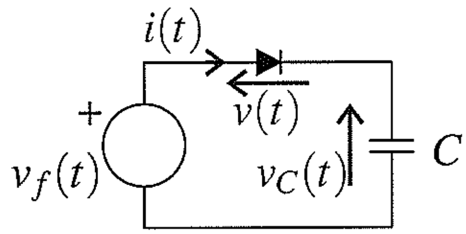
pero $v_C(0) = A = \dfrac{E R_2}{R_1 + R_2}$

y $i_L(0) = -C \left.\dfrac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = -C\left[B \cdot \omega_{LC}\right] = 0 \Rightarrow B = 0$

//

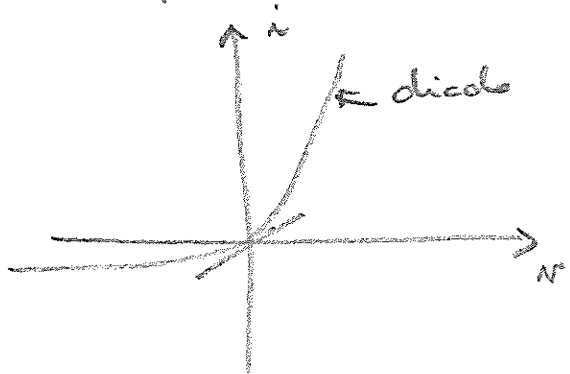
Problema 1.5 (10 puntos) *En la red de la figura,* $v_f(t) = 0{,}1\mu(t)[V]$, $C = 10^{-3}[F]$, $v_C(0) = 0[V]$ *y suponga que el diodo se puede modelar por la relación* $i(t) = e^{v(t)} - 1$.

Determine una expresion aproximada para $v_C(t)$, *para* $t \geq 0$.



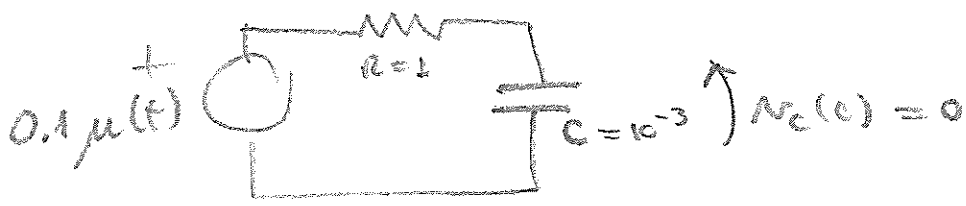
Solución

Para obtener una expresión aproximada, es posible hacer análisis a pequeña señal del diodo en el punto de operación (0,0) y en él obtener la respuesta del circuito RC resultante



$$\left.\frac{\Delta i}{\Delta v}\right|_{(0,0)} = \frac{\partial i}{\partial v} = \left. e^{v}\right|_{(0,0)} = 1$$

⇒ a pequeña señal



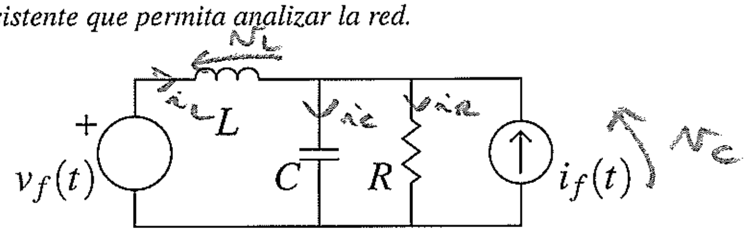
$$\Rightarrow v_c(t) \approx v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))\, e^{-t/\tau}$$

en que $v_c(\infty) = 0{,}1\ [V]$ (el condensador se carga al valor de la fuente)

$v_c(0) = 0\ [V]$

$\tau = RC = 10^{-3}\ [s]$

Problema 1.6 (10 puntos) *En la red de la figura, las condiciones iniciales en $t = 0$ son cero. Determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



Solución

En primer lugar, definimos variables

Luego

LCK: $i_L - i_C - i_R + i_f = 0$

LVK: $v_f - v_L - v_C = 0$

III: $v_L = L \dfrac{di_L}{dt}$

$i_C = C \dfrac{dv_C}{dt}$

$v_C = R\, i_R$

5 ecuaciones l. i.

y 5 incógnitas: $\{ i_L, i_C, i_R, v_L, v_C \}$