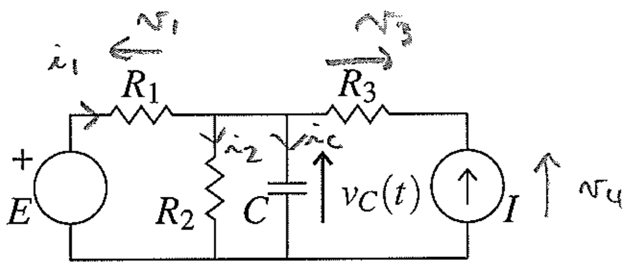
NOMBRE: Solución

JYE – ~~X~~ 10 de mayo de 2019

ELO102 – S1 2019 – Control #5

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

Problema 5.1 *En la red en la figura, ambas fuentes son constantes y la condición inicial es* $v_c(0) = V_o$. *Determine* una expresión para $v_C(t)$, *para* $t \geq 0$.



1) Una opción es plantear ecuaciones para llegar a la EDO que satisface el voltaje $v_c(t)$. Para ello definimos variables y luego tenemos que:

LCK: $i_1 - i_2 - i_c + I = 0$

LVK: $E - v_1 - v_c = 0$

$v_c + v_3 - v_4 = 0$

III: $v_1 = R_1 i_1$

$v_c = R_2 i_2$

$i_c = C \dfrac{dv_c}{dt}$

$v_3 = R_3 I$

(Son 7 ecs. l.i. en que las incógnitas son i_1, i_2, i_c, v_1, v_c, v_3, v_4)

III en LCK: $$\frac{v_1}{R_1} - \frac{v_c}{R_2} - C\frac{dv_c}{dt} + I = 0$$

con LVK $$\Rightarrow \frac{E - v_c}{R_1} - \frac{v_c}{R_2} - C\frac{dv_c}{dt} + I = 0$$

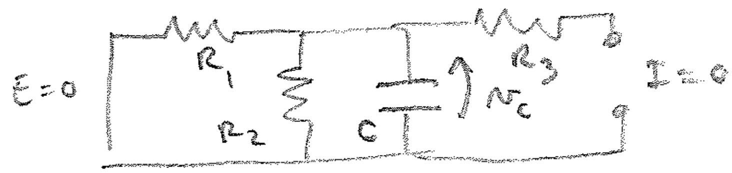
$$\Rightarrow \frac{E}{R_1} + I = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_c + C\frac{dv_c}{dt}$$

que se lleva a la forma $$\underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C}_{\tau} \frac{dv_c}{dt} + v_c = \underbrace{\frac{R_2(E + R_1 I)}{R_1 + R_2}}_{v_c(\infty)}$$

$\tau > 0$ por tanto:

$$\Rightarrow v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-t/\tau}$$ con $v_c(0) = V_o$

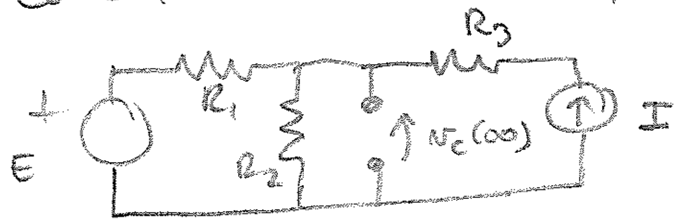
2) Otra opción es, dado que sólo hay componentes pasivas (R y C) y las fuentes actúan como excitaciones externas, podemos obtener la constante de tiempo τ apagando todas las fuentes.



Donde se observa que C se descarga a través de $R_1 // R_2$

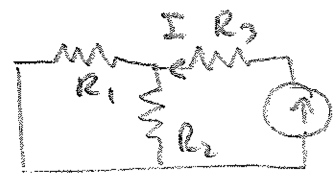
$$\Rightarrow \quad \tau = (R_1 // R_2)\, C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\, C \quad > 0$$

El voltaje $v_c(\infty)$ por tanto existe y se puede obtener en estado estacionario, en que el condensador actúa como circuito abierto (pues las fuentes son constantes)



Si $I = 0 \Rightarrow [v_c(\infty)]_1 = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} E$

Si $E = 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow [v_c(\infty)]_2 = (R_1 // R_2)\, I = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$

$$\Rightarrow \quad v_c(t) = v_c(\infty) + \left(v_c(0) - v_c(\infty)\right) e^{-t/\tau}$$

en que $\tau = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$

$$v_c(0) = V_0$$

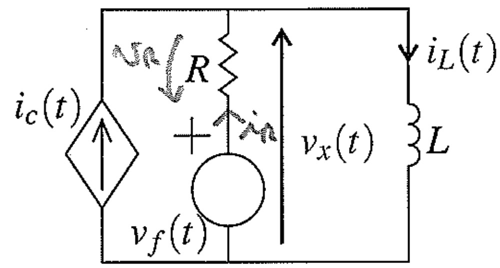
$$v_c(\infty) = \frac{R_2 (E + R_1 I)}{R_1 + R_2}$$

Solución

Problema 5.2 *Considere la red en la figura, en que*

$$R = 1/2[k\Omega] \quad v_f(t) = 2[V] \quad i_c(t) = \gamma v_x(t) \quad \gamma = 1[mS] \quad L = 0{,}2[H] \quad i_L(0) = 4[mA]$$

Determine y grafique $i_L(t)$, para $t \geq 0$.



Definimos variables y buscamos la EDO que satisface $i_L(t)$:

LCK: $\quad i_c + i_R - i_L = 0$

LVK: $\quad v_f - v_R - v_x = 0$

III: $\quad i_c = \gamma v_x$

$v_R = R\, i_R$

$v_x = L \frac{di_L}{dt}$

5 ecs. l.i.
5 incógnitas:
$\{i_c, i_R, i_L, v_R, v_x\}$

III en LVK: $\quad v_f - R\, i_R - L\frac{di_L}{dt} = 0$

LCK $\Rightarrow$

$$v_f - R(i_L - i_c) - L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$v_f - R(i_L - \gamma \underbrace{L\frac{di_L}{dt}}_{v_x}) - L\frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1 - R\gamma)L\frac{di_L}{dt} + R\, i_L = v_f$$

$$\left(\frac{1}{R} - \gamma\right)L\frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{v_f}{R}$$

Reemplazando valores:

$$\underbrace{0.2}_{\tau>0}\frac{di_L}{dt} + i_L = \underbrace{4}_{i_L(\infty)}$$

$$\Rightarrow \quad i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0) - i_L(\infty))\, e^{-t/\tau} = 4\ [mA]$$

pues $i_L(0) = i_L(\infty)$