NOMBRE: Solución

JYE – 26 de julio de 2019

ELO102 – S1 2019 – Control #6

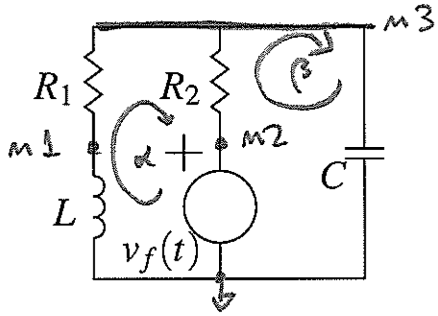
Problema 5.1 *Para la red en la figura,*

(a) Aplicando el método de voltajes de nodo o el de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red

(b) Suponga que el valor de las componentes es

$$R_1 = 1[k\Omega], \quad R_2 = 2[k\Omega], \quad C = 1[\mu F], y \quad L = 0{,}1[H]$$

Si la fuente de voltaje $v_f(t) = 12[V]$ ha estado encendida por mucho tiempo y ***se apaga*** *en $t = 0$, haga un gráfico aproximado, pero cualitativamente correcto, del voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*



(a) Con las definiciones de la figura aplicamos voltajes de nodo: $v_{n2}(t) = v_f(t)$ por tanto las incógnitas son $\{v_{n1}, v_{n3}\}$

LCK n_1: $\frac{1}{L} D^{-1} v_{n1} + \frac{v_{n1} - v_{n3}}{R_1} = 0$

LCK n_3: $\frac{v_{n3} - v_{n1}}{R_1} + \frac{v_{n3} - v_f}{R_2} + C D v_{n3} = 0$

2 ecuaciones l.i.

Alternativamente, con las orientaciones como en la figura, aplicamos corrientes de malla:

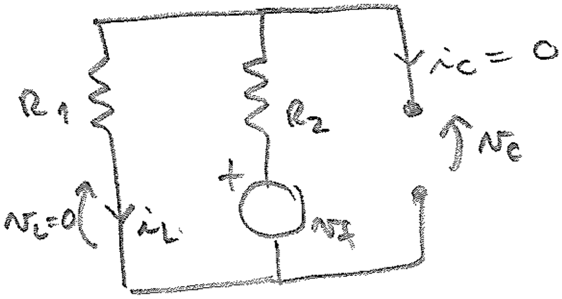
LVK en α: $L D i_\alpha + R_1 i_\alpha + R_2 (i_\alpha - i_\beta) + v_f = 0$

$$-v_f + R_2 (i_\beta - i_\alpha) + \frac{1}{C} D^{-1} i_\beta = 0$$

2 incógnitas: $\{i_\alpha, i_\beta\}$

y 2 ecuaciones l.i.

(b) Si la fuente es <u>constante</u> y ha estado encendida mucho tiempo se puede obtener la red en estado estacionario (e.e.):

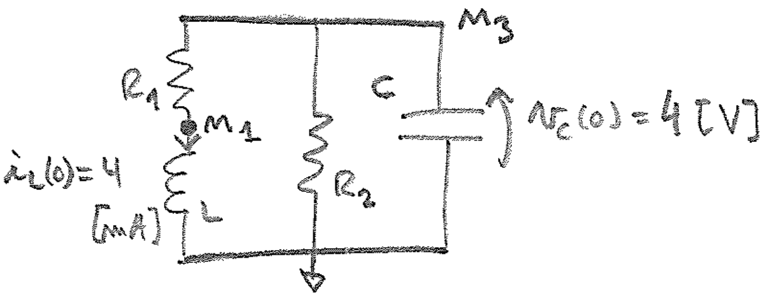


Note que el inductor se comporta como un cortocircuito y el condensador como un circuito abierto.

$$\Rightarrow i_L = \frac{v_f}{R_1 + R_2} = \frac{12\,[V]}{(1+2)\,[k\Omega]} = 4\,[mA]$$

$$y \quad v_C = \frac{R_1}{R_1+R_2} v_f = \frac{1\,[k\Omega] \cdot 12\,[V]}{(1+2)\,[k\Omega]} = 4\,[V]$$

Al apagar la fuente en $t=0$, se tiene un circuito RLC con condiciones iniciales:



La E.D.O del voltaje en el condensador se puede obtener (por ejemplo) por voltaje de nodo

$$\left(\frac{1}{L}D^{-1} + \frac{1}{R_1}\right) v_{n1} - \frac{1}{R_1} v_{n3} = 0$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + CD\right) v_{n3} - \frac{1}{R_1} v_{n1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R_1}{L}D^{-1} + 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + CD\right) v_{n3} - \frac{1}{R_1}\underbrace{\left(\frac{R_1}{L}D^{-1} + 1\right) v_{n1}}_{v_{n3}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{L}D^{-1} + \frac{R_1}{R_2 L}D^{-1} + \frac{R_1 C}{L} + \cancel{\frac{1}{R_1}} + \frac{1}{R_2} + CD\right) v_{n3} - \cancel{\frac{1}{R_1} v_{n3}} = 0$$

$$\Rightarrow \left[CD^2 + \left(\frac{R_1 C}{L} + \frac{1}{R_2}\right) D + \left(\frac{1}{L} + \frac{R_1}{L R_2}\right)\right] v_{n3} = 0$$

Reemplazando $v_{n3} = e^{\lambda t}$ y los valores de las componentes:

$$\Rightarrow \lambda^2 + \left(10 + \frac{1}{2}\right)\lambda + \left(10 + \frac{10}{2}\right) = 0$$

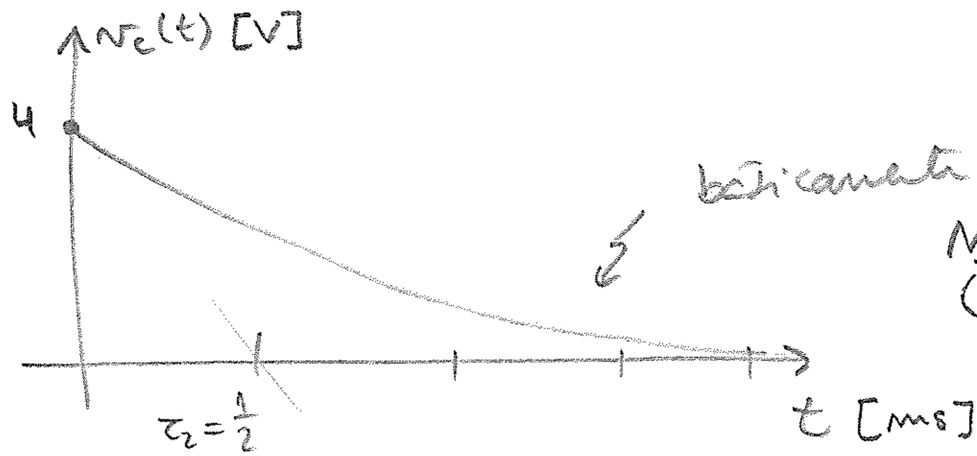
$$\Rightarrow \lambda^2 + 10.5\,\lambda + 15 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-10.5 \pm \sqrt{(10.5)^2 - 60}}{2}$$

Note que $(10.5)^2 - 60 > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^-$

Se puede aproximar $\sqrt{(10.5)^2 - 60} \approx \sqrt{50} \approx 7$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} \approx \frac{-10.5 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= -9 \\ \lambda_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_c(t) = A \underbrace{e^{-9t}}_{\tau_1 = 1/9} + B \underbrace{e^{-2t}}_{\tau_2 = 1/2}$$



básicamente es la exponencial **más lenta** (modo natural dominante)

⊛ Recuerde que:

R [kΩ]
C [μF]
L [H]
$i(t)$ [mA]
$v(t)$ [V]
$p(t)$ [mW]
t [ms]

son unidades consistentes para desarrollar los cálculos.