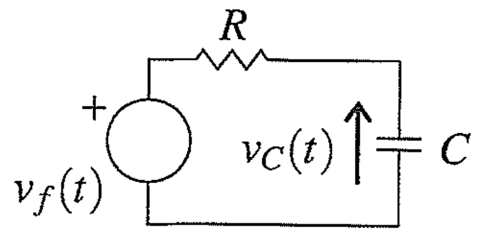
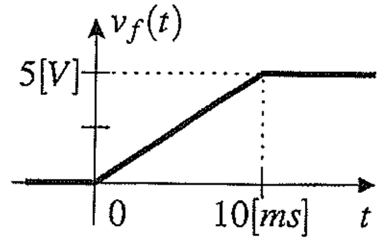
2/9/2019

Examen Final – ELO102 – S1 2019

Soluciones

Problema 1 (10 puntos) *En la red de la figura de la izquierda, $R = 10[k\Omega]$, $C = 0{,}1[\mu F]$ y $v_C(0) = 0$. Si $v_f(t)$ es como en la figura derecha, determine y grafique $v_C(t)$, para $t \geq 0$.*

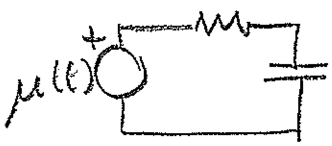




Solución

- La red es un sistema lineal e invariante en el tiempo, por tanto la respuesta a la señal de la figura se puede obtener a partir de la respuesta a escalón unitario.
- Note que $v_f(t) = \frac{1}{2}\left[r(t) - r(t-10)\right]$

  en que $r(t)$: rampa unitaria $r(t) = \int_{-\infty}^{t} \mu(\tau)\,d\tau$
- La respuesta del circuito RC cuando la fuente es un escalón se puede obtener rápidamente



$v_c(t) = v_c(\infty) + \left[v_c(0) - v_c(\infty)\right] e^{-t/RC} \quad t \geq 0$

en que $v_c(0) = 0$

y $v_c(\infty) = 1$ (solución en estado estacionario con fuente constante)

$\Rightarrow v_c(t) = T\langle v_c(0) = 0 \,;\, \mu(t)\rangle$

$= (1 - e^{-t})$ para $t \geq 0$

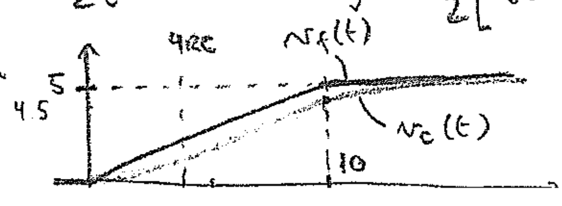
$= (1 - e^{-t})\mu(t)$

- Por tanto si $v_f(t) = r(t) \Rightarrow v_c(t) = \int_{-\infty}^{t} (1 - e^{-\tau})\mu(\tau)\,d\tau$

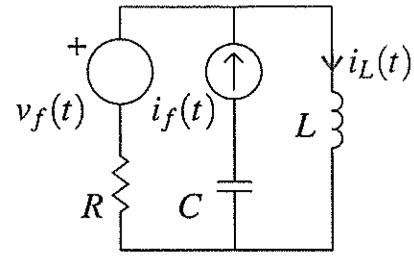
  $v_c(t) = \quad = (t + e^{-t} - 1)\mu(t)$

$\Rightarrow$ Si $v_f(t) = \frac{1}{2}\left[r(t) - r(t-10)\right] \Rightarrow \frac{1}{2}\left[(t + e^{-t} - 1)\mu(t) - \left((t-10) + e^{-(t-10)} - 1\right)\mu(t-10)\right]$

- Gráficamente



Problema 1.2 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = V_f$, $i_f(t) = A\sin(\omega t)$ y las condiciones iniciales son cero. Haga un gráfico cualitativamente correcto de $i_L(t)$ para $t \geq 0$, justificando claramente su respuesta.*

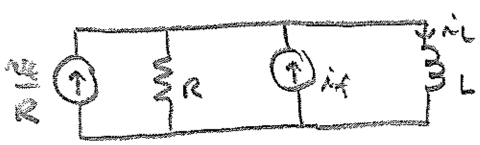


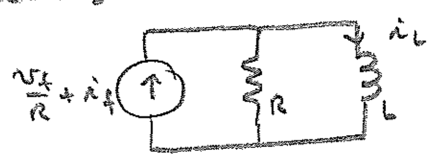
Solución

- En primer lugar, es posible aplicar equivalencias:

→ Para el inductor, el condensador es redundante por estar en serie con la fuente de corriente.

→ Posteriormente se puede aplicar transformación de fuentes para combinar ambas fuentes en una sola

⇒ 

⇒ 

- La respuesta del sistema $i_L(t)$ tendrá 3 partes:

$$i_L(t) = \text{modo natural} + \underbrace{\text{componente DC} + \text{componente AC}}_{\text{modos forzados (estado estacionario)}}$$

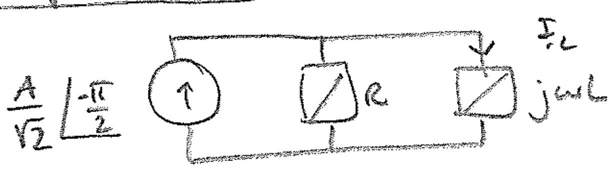
en que modo natural: $K e^{-t/\tau}$ $\tau = L/R$

$\boxed{\text{Componente DC}}$ en estado estacionario:

$(i_L)_{DC} = V_f/R$

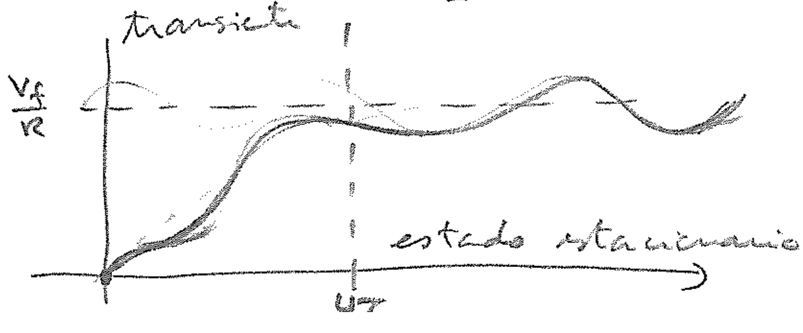
* superposición

$\boxed{\text{componente AC}}$ en el dominio de la transformada fasorial

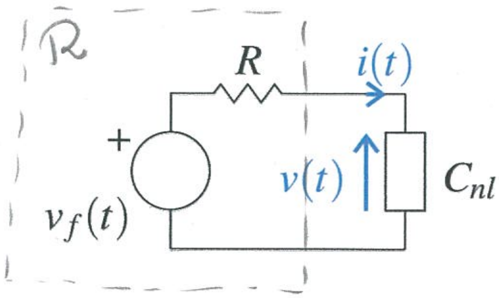


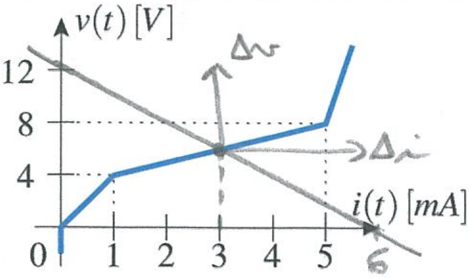
$$\mathbb{I}_L = \frac{R}{R + j\omega L}\,\frac{A}{\sqrt{2}}\angle{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow i_L(t) = \frac{R\,A}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right.\right.$$

⇒ 

Problema 3 (10 puntos) *En la red de la figura de la figura izquierda,* $R = 2[k\Omega]$, $v_f(t) = 12 + 0{,}3\cos(\omega t)$ *y la característica v/i de la componente* C_{nl} *se muestra en la figura derecha. Grafique* $i(t)$.





Solución

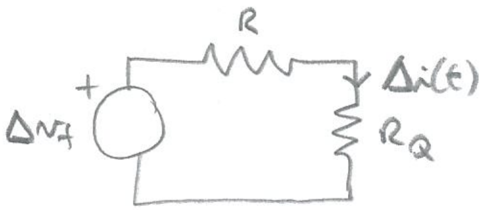
- Es posible hacer análisis a pequeña señal sobre el punto de operación.
- Punto de operación: si $v_f(t) = 12$ entonces la característica terminal de la red R es

$$v(t) = 12 - 2\,i(t)$$

que intersecta la característica de C_{nl} en $\begin{cases} i_Q = 3\ [mA] \\ v_Q = 6\ [V] \end{cases}$

- A pequeña señal: en Q la componente C_{nl} se comporta localmente como una resistencia, pues se aprecia del gráfico que $\dfrac{\Delta v}{\Delta i} = \dfrac{4[V]}{4[mA]} = 1\ [k\Omega] = R_Q$

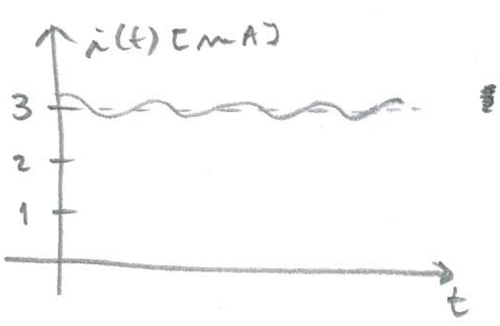
$\Rightarrow$



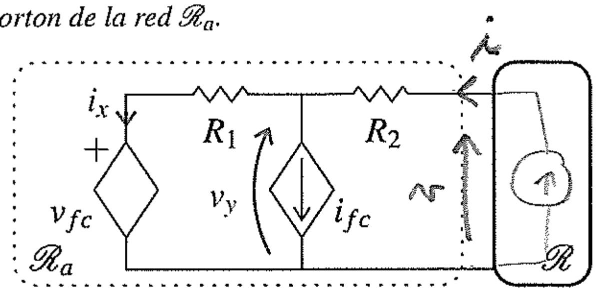
$$\Delta i(t) = \frac{\Delta v_f}{R + R_Q} = \frac{0.3\cos(\omega t)}{1 + 2} = 0.1\cos(\omega t)\ [mA]$$

- Gráficamente: $i(t) = 3 + 0{,}1\cos(\omega t)$

$\Rightarrow$



Problema 4 (10 puntos) *En la red de la figura, $i_{fc}(t) = \alpha\, i_x(t)$ y $v_{fc}(t) = \beta\, v_y(t)$. Detemine el equivalente Thévenin o el equivalente Norton de la red $\mathscr{R}_a$.*



Solución

- Notamos que R_a no tiene fuentes independientes ni componentes dinámicas con condiciones iniciales.
- Por tanto, la fuente Thévenin y la fuente Norton son iguales a cero: $e_T(t) = i_N(t) = 0$
- La red relajada se obtiene con la característica terminal que se puede obtener por
  - v. de nodos
  - c de mallas
  - III postulado
  - equivalencias.

Por ejemplo, por voltajes de nodo:

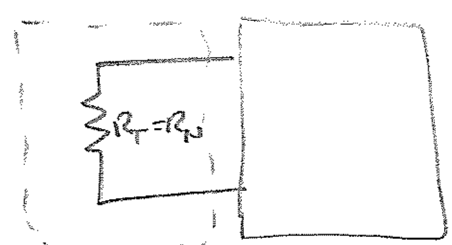
$$i_x + \frac{v_{fc} - v_y}{R_1} = 0$$
$$i_x + i_{fc} - i = 0$$
$$-i + \frac{v - v_y}{R_2} = 0$$
$$i_{fc} = \alpha i_x$$
$$v_{fc} = \beta v_y$$

$$i_x + \frac{\beta - 1}{R_1} v_y = 0$$
$$(1+\alpha) i_x - i = 0$$
$$i = \frac{v - v_y}{R_2}$$

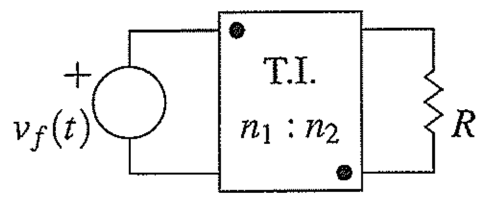
$$\Rightarrow \quad (1+\alpha)\frac{(1-\beta)}{R_1} v_y = i$$
$$R_2 i = v - v_y$$

$$\Rightarrow \quad R_2 i = v - \frac{R_1 i}{(1+\alpha)(1-\beta)}$$

$$\Rightarrow \quad v = \underbrace{\left[\frac{R_1 + R_2(1+\alpha)(1-\beta)}{(1+\alpha)(1-\beta)}\right]}_{R_T = R_N} i$$



Problema 5 (10 puntos) *En la red de la figura, $v_f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$. Determine la potencia activa entregada por la fuente.*

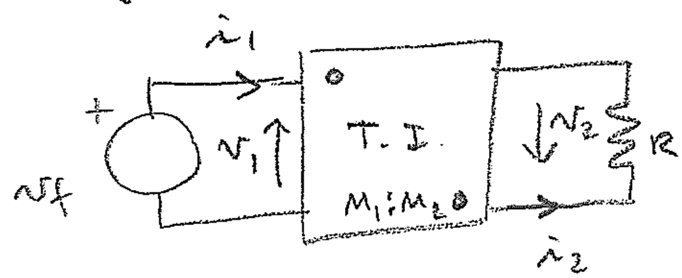


Solución

La potencia activa es la potencia promedio entregada por la fuente y, dado que el transformador es ideal, es igual a la potencia promedio absorbida por la resistencia.

De hecho, NO hay flujo de potencia reactiva en la red pues NO existen condensadores ni inductores (el transformador es ideal)

$\Rightarrow$



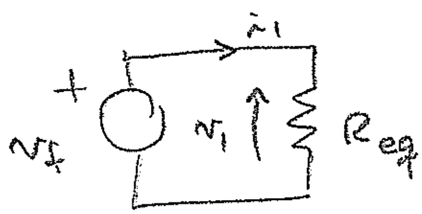
$$v_2 = R\, i_2$$

$$\underbrace{\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}\,;\quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}}$$

$$\frac{n_2}{n_1} v_1 = R\, \frac{n_1}{n_2}\, i_1$$

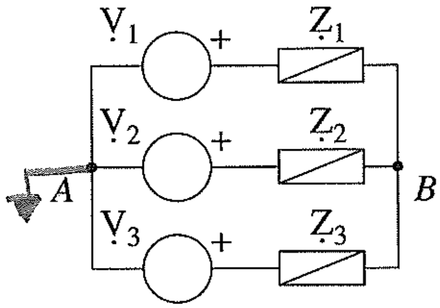
$$\Rightarrow \quad v_1 = \underbrace{R\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2}_{R_{eq}} i_1$$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad P_{ac} = \bar{p} = \frac{\left[(v_f)_{rms}\right]^2}{R_{eq}} = \frac{A^2}{2R}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$$

Problema 1.6 (10 puntos) *La figura representa una red en el dominio de la transformada fasorial. Determine el voltaje $v_{BA}(t)$ cuando $\underset{\cdot}{V}_1 = V\angle 0$, $\underset{\cdot}{V}_2 = V\angle\frac{2\pi}{3}$, $\underset{\cdot}{V}_3 = V\angle\frac{-2\pi}{3}$ y $\underset{\cdot}{Z}_1 = \underset{\cdot}{Z}_2 = \underset{\cdot}{Z}_3$.*



Solución

El voltaje $\underset{\cdot}{V}_{AB}$ se puede determinar, por ejemplo, aplicando voltajes de nodo.

$$\frac{\underset{\cdot}{V}_{BA} - \underset{\cdot}{V}_1}{\underset{\cdot}{Z}_1} + \frac{\underset{\cdot}{V}_{BA} - \underset{\cdot}{V}_2}{\underset{\cdot}{Z}_2} + \frac{\underset{\cdot}{V}_{BA} - \underset{\cdot}{V}_3}{\underset{\cdot}{Z}_3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\cdot}{V}_{BA} = \frac{\frac{\underset{\cdot}{V}_1}{\underset{\cdot}{Z}_1} + \frac{\underset{\cdot}{V}_2}{\underset{\cdot}{Z}_2} + \frac{\underset{\cdot}{V}_3}{\underset{\cdot}{Z}_3}}{\frac{1}{\underset{\cdot}{Z}_1} + \frac{1}{\underset{\cdot}{Z}_2} + \frac{1}{\underset{\cdot}{Z}_3}}$$

Si $\underset{\cdot}{Z}_1 = \underset{\cdot}{Z}_2 = \underset{\cdot}{Z}_3 \quad \Rightarrow \quad \underset{\cdot}{V}_{BA} = \frac{1}{3}\left(\underset{\cdot}{V}_1 + \underset{\cdot}{V}_2 + \underset{\cdot}{V}_3\right)$

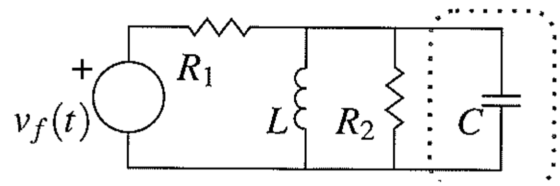
Si, además,

$$\left.\begin{aligned} \underset{\cdot}{V}_1 &= V\angle 0 \\ \underset{\cdot}{V}_2 &= V\angle 2\pi/3 \\ \underset{\cdot}{V}_3 &= V\angle -2\pi/3 \end{aligned}\right\} \quad \underset{\cdot}{V}_1 + \underset{\cdot}{V}_2 + \underset{\cdot}{V}_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

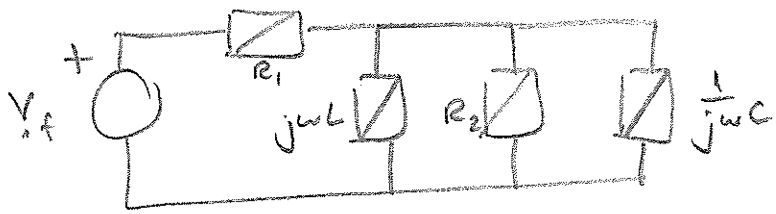
$$\underset{\cdot}{V}_{BA} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{BA}(t) = 0$$

Problema 7 (10 puntos) *A un circuito RL se le conecta un condensador tal como muestra la figura. Determine el valor de C para que el factor de potencia (F.P.) desde los terminales de la fuente sea **máximo**.*

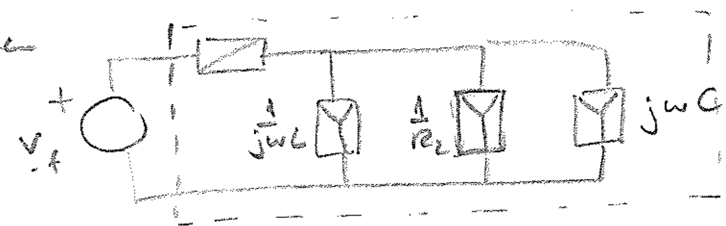


Solución

En el dominio de la T.F



o bien



Para que el F.P. sea igual a 1, basta que la impedancia o admitancia equivalente sea real (parte imaginaria cero o ángulo cero)

Es decir, basta que
$$\frac{1}{j\omega L} + j\omega C = 0$$
$$j\left(\frac{-1}{\omega L} + \omega C\right) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{\omega^2 L}}$$