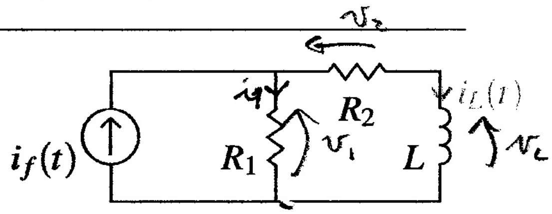
ELO102 – S2 2019 – Control #4 (*online*)

Problema 4.1 *En la red de la figura,* $i_L(0) = I_o$

(a) Determine la EDO que relaciona $i_L(t)$ *con* $i_f(t)$.

(b) Si $i_f(t) = I_f$, *determine* $i_L(t)$ *para* $t \geq 0$.



(a) Se puede aplicar algún método (nodos o mallas) o bien plantear ecuaciones de análisis

LVK: $v_1 = v_2 + v_L \longrightarrow R_1 i_1 = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}$

LCK: $i_f = i_1 + i_L \longrightarrow R_1(i_f - i_L) = R_2 i_L + L\frac{di_L}{dt}$

III: $v_2 = R_2 i_L$

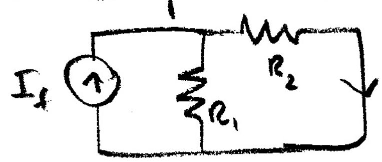
$v_1 = R_1 i_1$

$v_L = L\frac{di_L}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\frac{L}{R_1+R_2}}_{\tau} \frac{di_L}{dt} + i_L = \frac{R_1}{R_1+R_2} i_f(t)}$$

(b) En la EDO obtenida se identifica τ e $i_L(\infty) = \frac{R_1}{R_1+R_2} I_f$

(De hecho cuando $t \to \infty$, con fuentes constantes, el inductor se comporta como un corto circuito:



$i_L(\infty) = \frac{R_1}{R_1+R_2} I_f$ pues es un divisor de corriente)

De esta forma se tiene que

$$i_L(t) = i_L(\infty) + (i_L(0) - i_L(\infty))\, e^{-t/\tau}$$

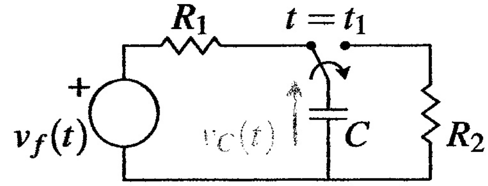
en que $i_L(0) = I_o$

$$i_L(\infty) = \frac{R_1}{R_1+R_2} I_f$$

y $\tau = \frac{L}{R_1+R_2}$

Solución

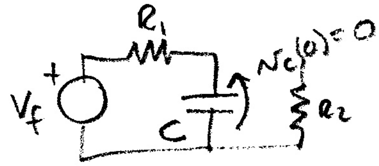
Problema 4.2 *En la red de la figura, $v_C(0)=0$, $v_f(t)=V_f$, $R_2=R_1/2$ y el interruptor se cambia de posición en $t=t_1>0$.*



(a) Grafique $v_C(t)$, para $t\geq 0$.

(b) Determine la energía total disipada por R_2 en el intervalo $t\in[0,\infty)$.

(a) Para $0\leq t\leq t_1$ la red es

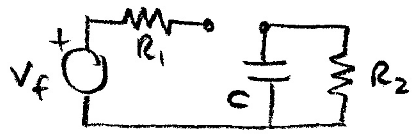


por tanto

$$v_C(t) = v_C(\infty)+(v_C(0)-v_C(\infty))\,e^{-t/\tau}$$

en que $v_C(0)=0$, $v_C(\infty)=V_f$ y $\tau = R_1C$ $\Big\}$ $v_C(t) = \left(1-e^{-\frac{t}{R_1C}}\right)V_f \qquad 0\leq t\leq t_1$

para $t\geq t_1$ la red es



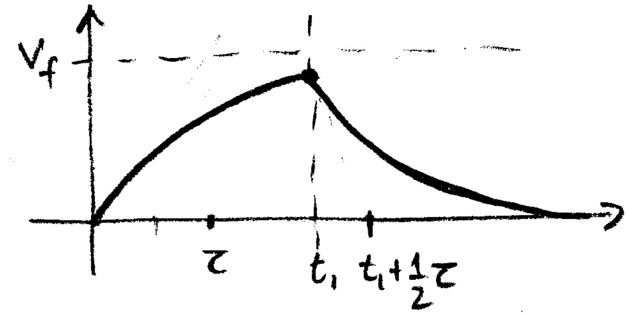
en que $v_C(t_1)$ se obtiene de la expresión anterior

$$v_C(t_1) = \left(1-e^{-\frac{t_1}{R_1C}}\right)V_f = V_1$$

$$v_C(t) = v_C(\infty)+(v_C(t_1)-v_C(\infty))\,e^{-\frac{(t-t_1)}{\tau_2}} \;;t\geq t_1$$

en que $v_C(\infty)=0$ (no hay fuente), $v_C(t_1)=V_1$ y $\tau_2 = R_2C = \frac{1}{2}\tau$ $\Big\}$ $v_C(t) = V_1\,e^{-\frac{(t-t_1)}{R_2C}} \quad t\geq t_1$

$\Rightarrow$



(b) La energía total disipada por R_2 es la que el condensador posee al momento de conmutar el switch:

$$E_T = E_C(t_1) = \frac{1}{2}CV_1^2 \quad \text{en que } V_1 = \left(1-e^{-t_1/R_1C}\right)V_f$$

El mismo resultado se obtiene al integrar la potencia instantánea disipada por R:

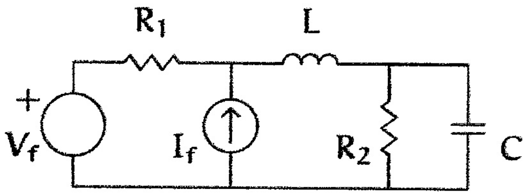
$$E_T = \int_0^\infty p(t)\,dt = \int_{t_1}^\infty\left(\frac{v_C^2(t)}{R}\right)dt \quad \text{en que } v_C(t) = V_1\,e^{\frac{-2(t-t_1)}{R_1C}} \quad (t\geq t_1)$$

Solución

Problema 4.3 *En la red de la figura, ambas fuentes son constantes.*

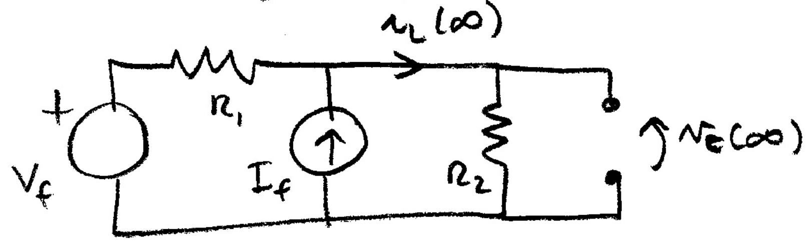
(a) Determine $i_L(\infty)$.

(b) Determine $v_C(\infty)$.



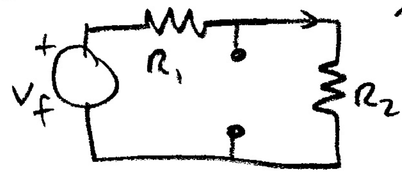
Dado que ambas fuentes son constantes, en estado estacionario, cuando $t \to \infty$, el inductor se comporta como un cable y el condensador se comporta como un circuito abierto;

$t \to \infty$



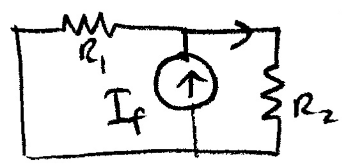
a) Por superposición:

$I_f = 0$



$$i_{L1}(\infty) = \frac{V_f}{R_1 + R_2}$$

$V_f = 0$



$$i_{L2}(\infty) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_f$$

$$\Rightarrow \quad i_L(\infty) = \frac{V_f + R_1 I_f}{R_1 + R_2}$$

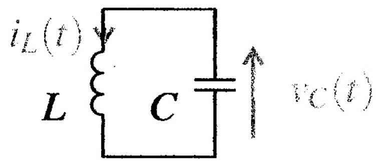
b) $$v_C(\infty) = R_2\, i_L(\infty) = \frac{R_2 (V_f + R_1 I_f)}{R_1 + R_2}$$

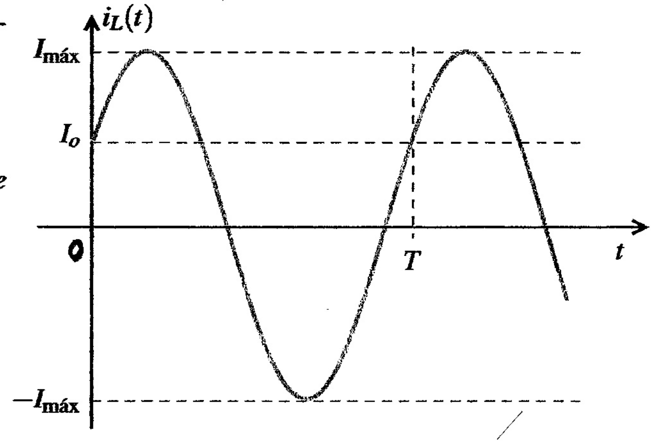
Solución

Problema 4.4 *La grafico de la derecha muestra la corriente de la red LC*

(a) Determine la EDO que satisface $v_C(t)$.

(b) En base a los datos del gráfico, determine $v_C(0)$, ~~L y C~~ y $\max_t v_C(t)$





(a)
$$v_C(t) = L \frac{di_L}{dt}$$
$$-i_L(t) = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_C = -LC \frac{dv_C}{dt}$$

(b) De la figura $i_L(0) = I_o$

Por conservación de energía
$$\frac{1}{2} L i_L^2(0) + \frac{1}{2} C v_C^2(0) = \frac{1}{2} L I_{MAX}^2$$
$$\Rightarrow v_C^2(0) = \frac{L}{C}\left(I_{\text{máx}}^2 - I_o^2\right)$$
$$v_C(0) = \sqrt{\frac{L}{C}\left(I_{\text{máx}}^2 - I_o^2\right)}$$

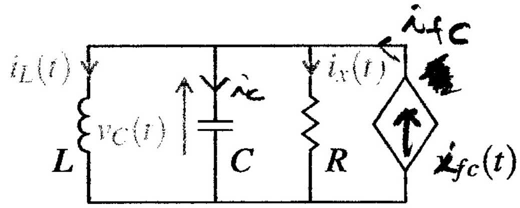
Asimismo
$$\frac{1}{2} L I_{\text{máx}}^2 = \frac{1}{2} C V_{max}^2$$
$$\Rightarrow V_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_{max}$$

Solución

Problema 4.5 *En la red de la figura, $v_{fc}(t) = k\,i_x(t)$ y las condiciones iniciales son $i_L(0) = I_o$ y $v_C(t) = V_o$.*

(a) Determine la EDO que satisface $i_L(t)$.

(b) Si $i_L(t)$ es como en la figura del problema anterior, determine k en función de los demás datos.



(a) Puede aplicarse métodos (nodos o mallas) o bien plantear ecuaciones de análisis:

LCK: $i_L + i_C + i_x = i_{fc} \rightarrow i_L + C\dfrac{dv_C}{dt} + \dfrac{1}{R}v_C = k\,i_x$

LVK: —

III:
$v_C = L\dfrac{di_L}{dt}$

$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$

$v_C = R\,i_x$

$i_{fc} = k\,i_x$

$$i_L + LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} = \frac{k}{R}L\frac{di_L}{dt}$$

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}(1-k)\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

(b) Para que la red se comporte como un oscilador, la fuente controlada debe <u>compensar</u> la resistencia o lo que es lo mismo, el término central de la EDO anterior debe hacerse 0 $\Leftrightarrow$ $k = 1$