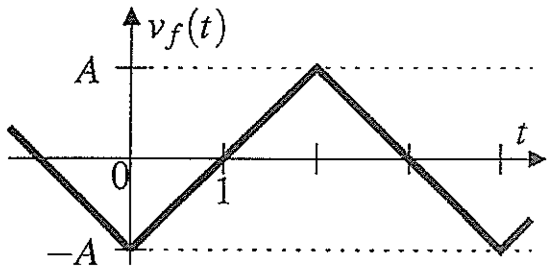
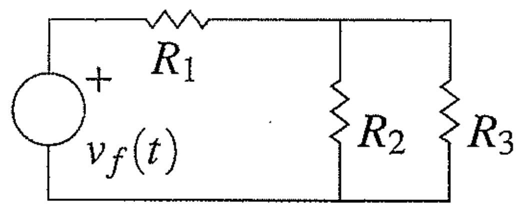
$\boxed{\text{Solución}}$

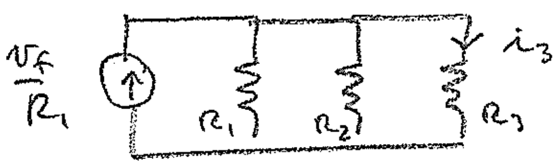
ELO102 – S2 2019 – Examen Final Fase I (*online*)

Problema 1 *En la red de la figura, determine la potencia promedio disipada por R_3.*





Puede usarse equivalencias para simplificar los cálculos



$$\Rightarrow \quad i_3 = \frac{1/R_3}{1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3} \frac{v_f}{R_1}$$

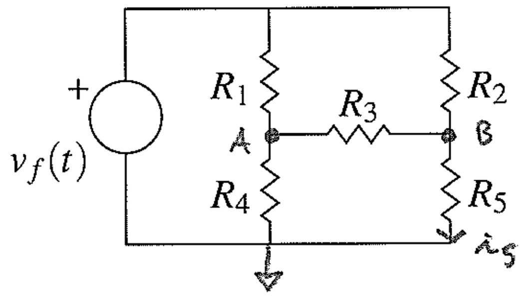
pues es un divisor de corriente

La potencia promedio es entonces

$$\overline{P} = (i_3)^2_{RMS} R_3 \qquad = \left(\frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \frac{1}{R_1} \right)^2 (v_f)^2_{RMS} R_3$$

y $v_{f,RMS} = \ldots = \frac{A}{\sqrt{3}}$ (puede asumirse conocido el cálculo)

Problema 2 *En la red de la figura, Determine la corriente por R_5.*



Se puede aplicar, por ejemplo, método de voltajes de nodo

LCK nodo A: $\dfrac{v_A - v_f}{R_1} + \dfrac{v_A - v_B}{R_3} + \dfrac{v_A}{R_4} = 0$

LCK nodo B: $\dfrac{v_B - v_f}{R_2} + \dfrac{v_B - v_A}{R_3} + \dfrac{v_B}{R_5} = 0$

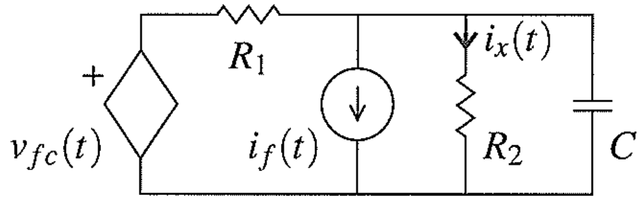
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A \\ v_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_f/R_1 \\ v_f/R_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Usando conductancias:

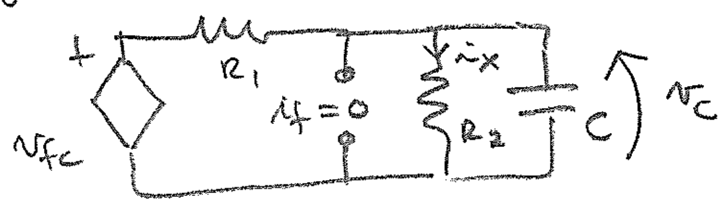
$$v_B = \frac{\begin{vmatrix} G_1+G_3+G_4 & v_f G_1 \\ -G_3 & v_f G_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_1+G_3+G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2+G_3+G_5 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow i_5 = v_B G_5 = \frac{\left[(G_1+G_3+G_4)G_2 - G_1G_3\right] G_5 v_f}{(G_1+G_3+G_4)(G_2+G_3+G_5) + G_3^2}$$

Problema 3 *En la red de la figura, $v_{fc}(t) = k\,i_x(t)$. Determine bajo qué condiciones existe el estado estacionario.*

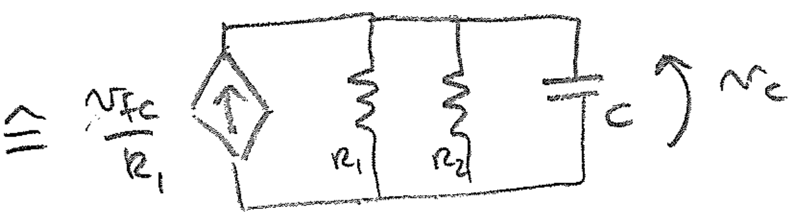


El estado estacionario existe si y sólo si el transitorio debido a las condiciones iniciales desaparece cuando $t \to \infty$. Por tanto, basta analizar la respuesta del sistema a condiciones iniciales, apagando las fuentes independientes:

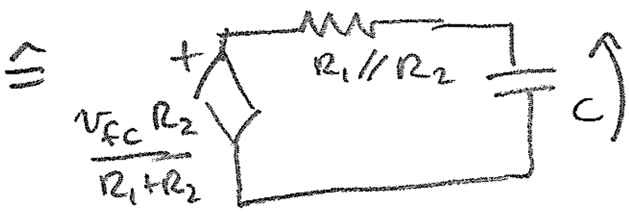


cambiamos la variable clave de la fuente controlada:

$$v_{fc} = k i_x = \frac{k}{R_2} v_C$$



LVK.



$$\Rightarrow \quad \frac{v_{fc} R_2}{R_1+R_2} = (R_1 // R_2)\, C \frac{dv_c}{dt} + v_c$$

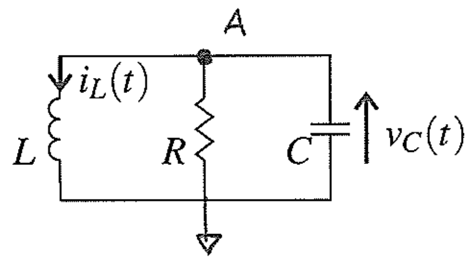
$$\Rightarrow \quad \frac{k\, v_c}{R_1+R_2} = \frac{R_1 R_2 C}{R_1+R_2} \frac{dv_c}{dt} + v_c$$

$$\Rightarrow \quad R_1 R_2 C \frac{dv_c}{dt} + (R_1+R_2-k)\, v_c = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_c(t) = A e^{-t/\tau} \text{ en que } \tau = \frac{R_1 R_2 C}{R_1+R_2-k}$$

en que vemos que $\tau > 0 \iff \boxed{k < R_1 + R_2}$ y existe el e.e.

Problema 4 *En la red de la figura, $v_C(0) = V_o > 0$, $i_L(0) = 0$ y $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$. Determine y grafique $v_C(t)$ para $t \geq 0$.*



Aplicamos método de nodos.

LCK en nodo A: $\frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C = 0$

⇒ EDO de 2do orden

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC}v_C = 0$$

⇒ ecuación característica:

$$\lambda^2 + \frac{1}{RC}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{1}{4R^2C^2} \underset{R=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}{=} \frac{1}{\frac{L}{C}\cdot C^2} = \frac{1}{LC} \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2RC} = \lambda$$

$$\Rightarrow \quad v_C(t) = A e^{\lambda t} + B t e^{\lambda t}$$

Aplicando c.i. $v_C(0) = \boxed{A = V_0}$

Del LCK en A: $\frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} + i_L = 0 \Rightarrow \left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{C}\left[-i_L(0) - \frac{v_C(0)}{R}\right]$

$$= \frac{-V_0}{RC}$$

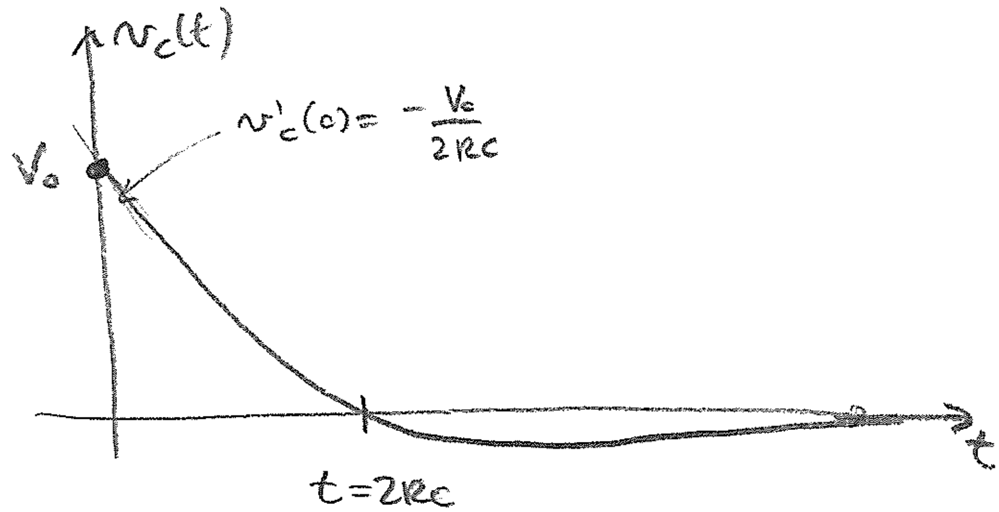
pero $\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0} = \lambda A + B$

$$= \left(\frac{-1}{2RC}\right)V_0 + B = \frac{-V_0}{RC} \Rightarrow B = \frac{-V_0}{2RC} < 0$$

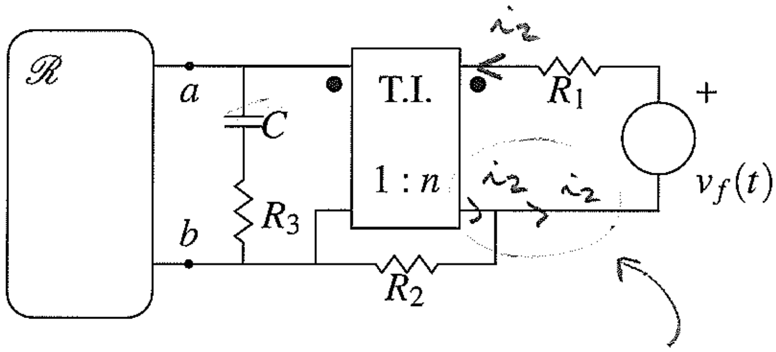
$$\Rightarrow \quad v_c(t) = V_0 e^{\lambda t} - \frac{V_0}{2RC} t e^{\lambda t}$$

Note $v_c(t) = 0 \iff V_0 - \frac{V_0}{2RC} t = 0$

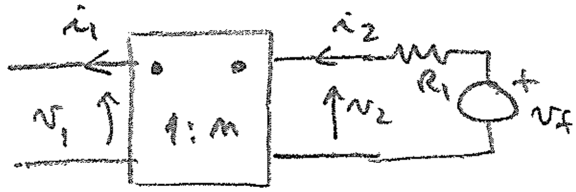
$$\iff t = 2RC$$



Problema 5 *En la red de la figura, $v_f(t) = A\cos(\omega t)$. Determine el equivalente Thévenin en estado estacionario desde los terminales $a-b$.*



- Note que, por las corrientes en el secundario del transformador ideal (T.I.) se tiene que la corriente por R_2 es cero:
- Es posible "reflejar" la fuente $v_f(t)$ y R_1 hacia el primario del T.I.:



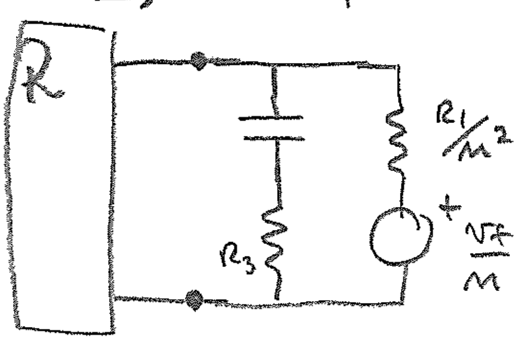
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n} \qquad \frac{i_1}{i_2} = n$$

$$i_2 = \frac{v_f - v_2}{R_1}$$

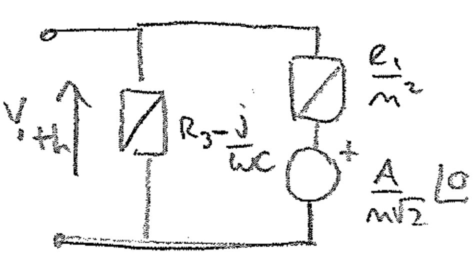
$$\frac{1}{n} i_1 = \frac{v_f - n v_1}{R_1}$$

$$i_1 = \frac{n v_f - n^2 v_1}{R_1} = \frac{\frac{v_f}{n} - v_1}{\frac{R_1}{n^2}}$$

$\Rightarrow$ Red equivalente



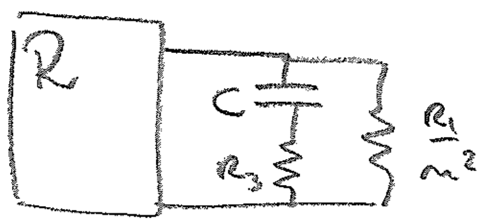
V_{th} | Se puede usar T.F.



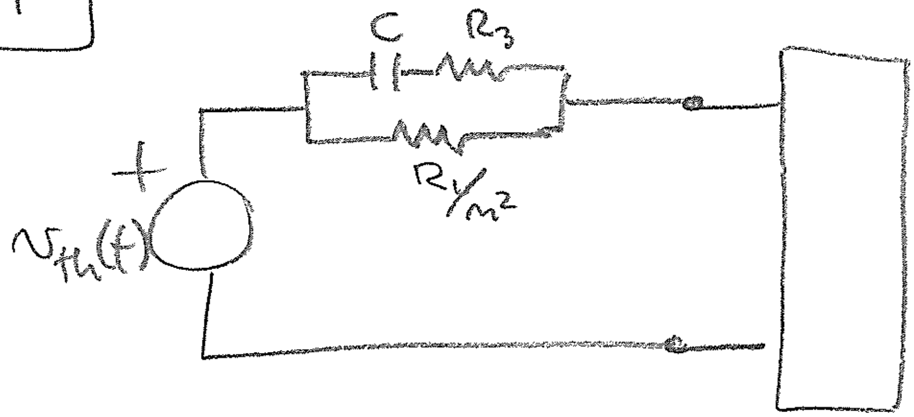
$$V_{th} = \frac{R_3 - \frac{j}{\omega C}}{\left(R_3 + \frac{R_1}{n} - \frac{j}{\omega C}\right)} \frac{A}{n\sqrt{2}}\angle$$

$$\Rightarrow v_{th}(t) = \frac{A\sqrt{R_3^2+\left(\frac{1}{wC}\right)^2}}{n\sqrt{\left(R_3+\frac{R_1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{wC}\right)^2}} \cos\left(wt - \text{Arctg}(wR_3C) + \text{Arctg}\left(wC\left(R_3+\frac{R_1}{n}\right)\right)\right)$$

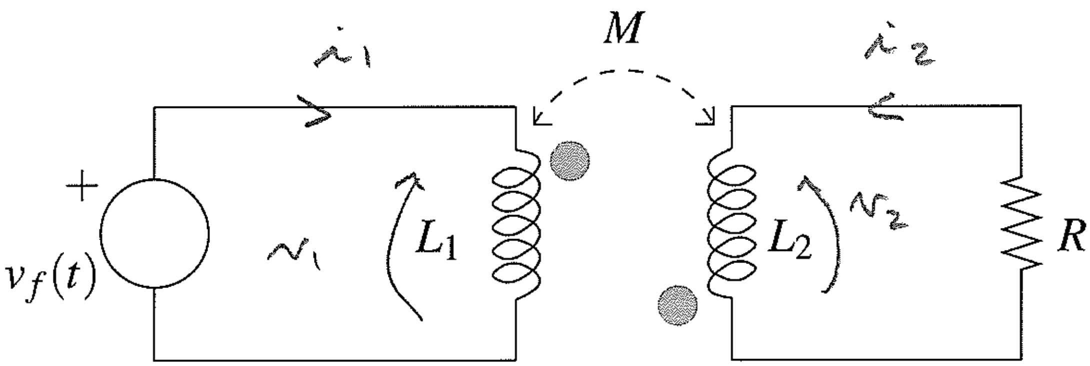
$\boxed{R_T}$ Se apaga la fuente independiente y NO se puede simplificar más la red



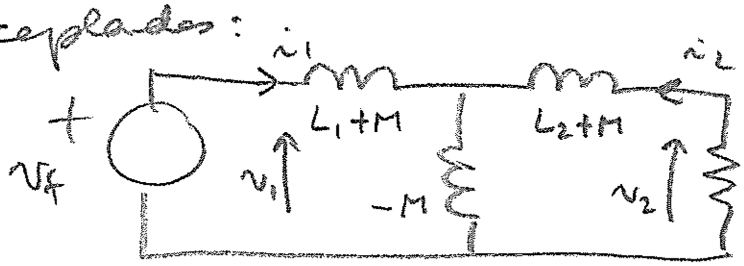
$\Rightarrow$ $\boxed{R_T}$



Problema 6 *En la red de la figura, $v_f(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$. Determine la potencia reactiva entregada por la fuente.*



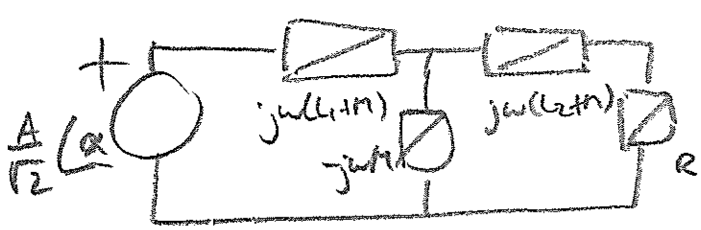
Podemos usar equivalencia "T" de los inductores acoplados:



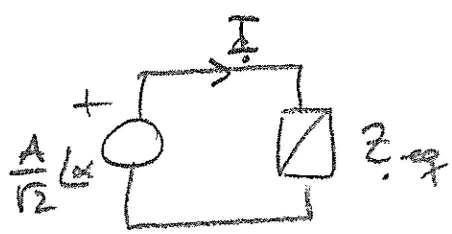
$$v_1 = (L_1+M)\frac{di_1}{dt} - M\frac{d}{dt}(i_1+i_2) = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = (L_2+M)\frac{di_2}{dt} - M\frac{d}{dt}(i_1+i_2) = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

en el dominio de la T.F.



$\hat{=}$



$$\underset{\cdot}{Z}_{eq} = j\omega(L_1+M) + (-j\omega M) \,//\, (R + j\omega(L_2+M))$$

$$\underset{\cdot}{P} = \underset{\cdot}{V}_f \underset{\cdot}{I}^* = \frac{|\underset{\cdot}{V}_f|^2}{(\underset{\cdot}{Z}_{eq})^*} = \frac{|\underset{\cdot}{V}_f|^2}{|\underset{\cdot}{Z}_{eq}|^2}\underset{\cdot}{Z}_{eq}$$

$$\Longrightarrow \quad Q = \mathrm{Im}\{\underset{\cdot}{P}\} = \frac{|\underset{\cdot}{V}_f|}{|\underset{\cdot}{Z}_{eq}|}\mathrm{Im}\{\underset{\cdot}{Z}_{eq}\}$$