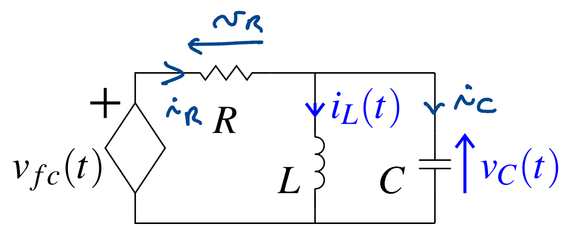
Solución

JYE – 2 de julio de 2020

ELO102 – S1 2020 – Control #5

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

Problema 5.1 *Considere la red de la figura en que $v_{fc}(t) = \alpha v_C(t)$ y las condiciones iniciales son $v_C(0) = V_o$ e $i_L(0) = I_o$. Determine qué condición debe satisfacer α para que se obtenga una oscilación sostenida en la corriente por el inductor.*



Para encontrar la condición sobre k en primer lugar determinamos la EDO que satisface $i_L(t)$

Definimos variables como en la figura y planteamos ecuaciones

LCK: $i_R = i_C + i_L$ $\longrightarrow$ $\dfrac{v_{fc} - v_C}{R} = C\dfrac{dv_C}{dt} + i_L$

LVK: $v_{fc} = v_R + v_C$

III: $v_R = R i_R$

$i_C = C\dfrac{dv_C}{dt}$

$v_C = L\dfrac{di_L}{dt}$

$v_{fc} = \alpha v_C$

$$\frac{\alpha - 1}{R} v_C = CL\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L$$

$$\frac{\alpha - 1}{R} L\frac{di_L}{dt} = CL\frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L$$

Por tanto la EDO es

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \left(\frac{1-\alpha}{R}\right)L\frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

(La estructura de la EDO es la misma para otras señales de la red dada)

Suponiendo $i_L(t) = e^{\lambda t}$ $\Rightarrow$ $LC\lambda^2 + \left(\frac{1-\alpha}{R}\right)L\lambda + 1 = 0$

Habrá oscilación sostenida si y sólo si las raíces de esta ecuación característica son puramente imaginarias, es decir, si y sólo si

$$\left(\frac{1-\alpha}{R}\right)L = 0 \iff \alpha = 1$$

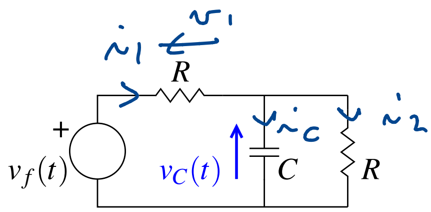
//

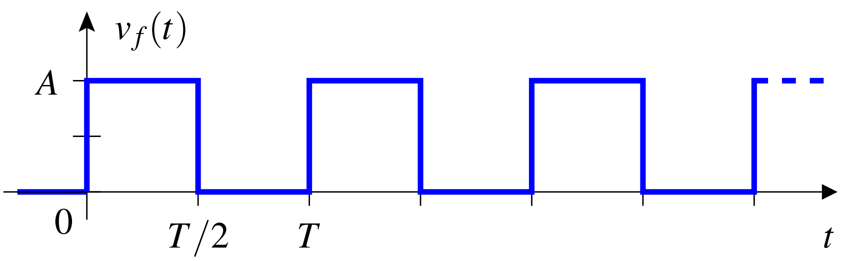
$\boxed{\text{Solución}}$

ELO102 – S1 2020 – Control #5

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

Problema 5.2 *Considere la red de la figura izquierda en que la fuente de voltaje es la señal cuadrada en el gráfico de la derecha. El condensador está inicialmente descargado. Si el periodo de la señal cuadrada es $T = RC$, haga un gráfico lo más preciso posible del voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*





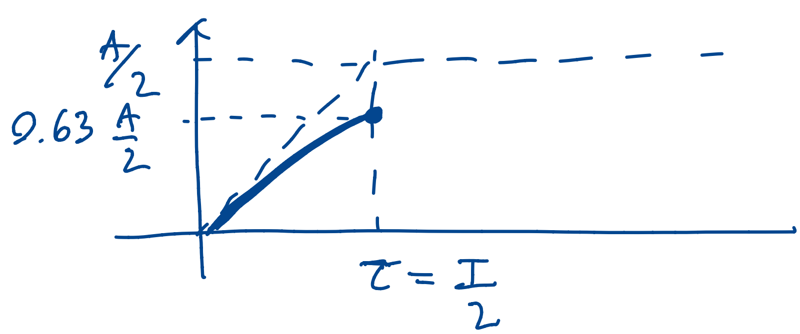
Si determinamos la EDO para $v_c(t)$:

$$v_f = v_1 + v_c$$
$$i_1 = i_c + i_2$$
$$i_1 = \frac{v_1}{R}$$
$$i_c = C\frac{dv_c}{dt}$$
$$i_2 = \frac{v_c}{R}$$

$$\rightarrow v_f = R\,i_1 + v_c = R(i_c + i_2) + v_c$$
$$v_f = RC\frac{dv_c}{dt} + 2v_c$$
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{RC}{2}}_{\tau = \frac{RC}{2}} \frac{dv_c}{dt} + v_c = \frac{v_f(t)}{2}$$

Entre 0 y $T/2$: $v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))e^{-t/\tau}$

en que $v_c(\infty) = \frac{A}{2}$ $\quad v_c(0) = 0$ $\quad \tau = \frac{RC}{2} = \frac{T}{2}$

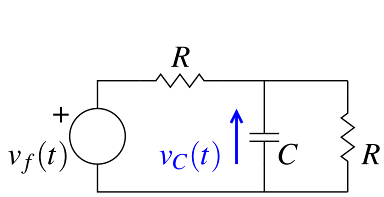


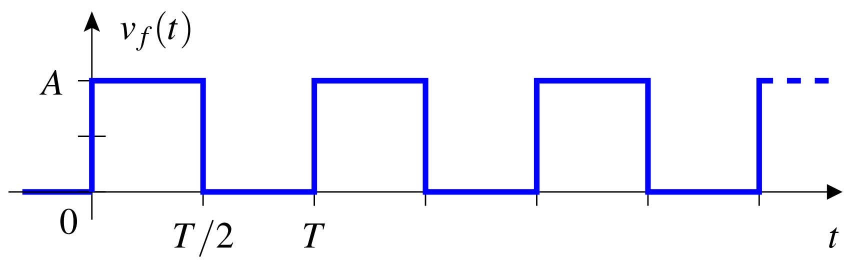
Solución (cont.)

ELO102 – S1 2020 – Control #5

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

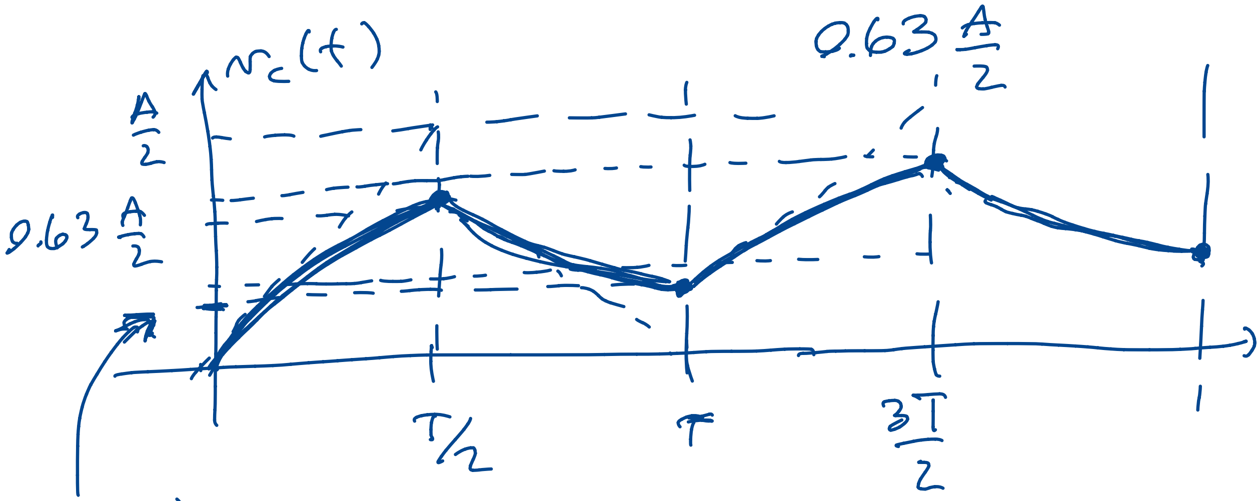
Problema 5.2 *Considere la red de la figura izquierda en que la fuente de voltaje es la señal cuadrada en el gráfico de la derecha. El condensador está inicialmente descargado. Si el periodo de la señal cuadrada es $T = RC$, haga un gráfico lo más preciso posible del voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*





Entre $\frac{T}{2}$ y T: La fuente está apagada

$$\Rightarrow v_c(t) = v_c\left(\tfrac{T}{2}\right) e^{-\frac{(t-T/2)}{\tau}}$$



$\left(0.63\,\frac{A}{2}\right) 0.37$

Entre T y $\frac{3T}{2}$:

$$v_c(t) = \frac{A}{2} + \left(v_c(T) - \frac{A}{2}\right) e^{-\frac{(t-T)}{\tau}}$$

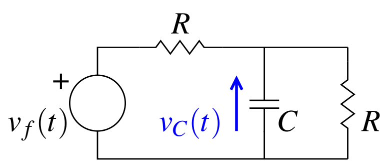
⊛ Asintóticamente, el valor medio de $v_c(t)$ es $\frac{A}{4}$

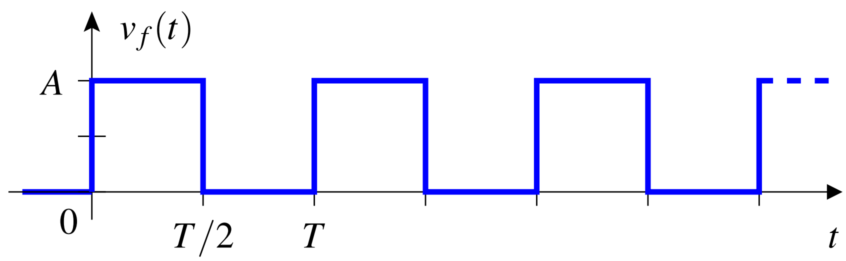
Solución (cont.)

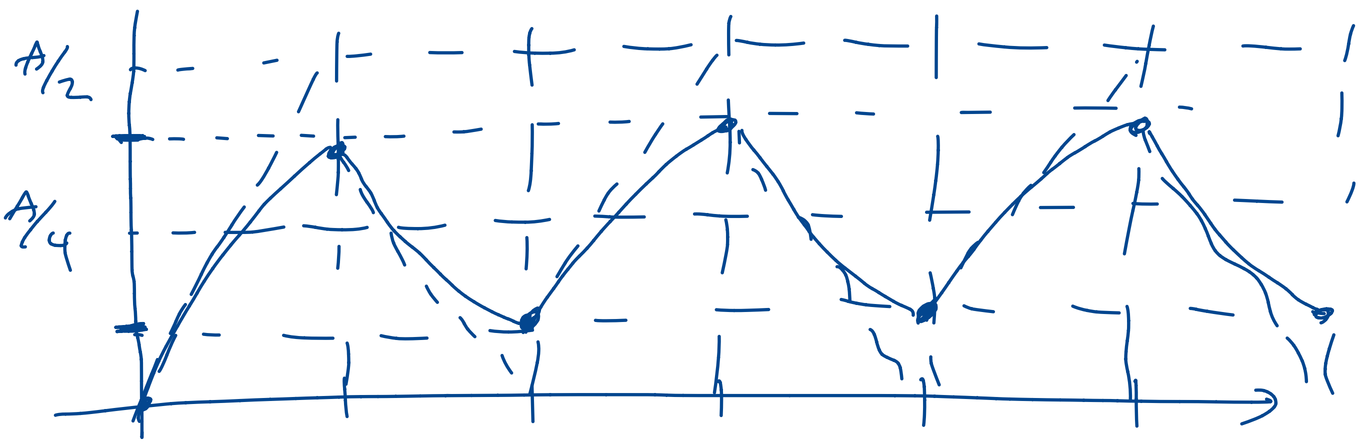
ELO102 – S1 2020 – Control #5

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos. Indique claramente cuál responde.

Problema 5.2 *Considere la red de la figura izquierda en que la fuente de voltaje es la señal cuadrada en el gráfico de la derecha. El condensador está inicialmente descargado. Si el periodo de la señal cuadrada es $T = RC$, haga un gráfico lo más preciso posible del voltaje en el condensador para $t \geq 0$.*







La señal (asintóticamente) es simétrica en torno a $A/4$

$$\left(\frac{A}{4} + a\right) e^{-1} = \frac{A}{4} - a$$

$$\Rightarrow a = \frac{\frac{A}{4}(1 - e^{-1})}{1 + e^{-1}} = \frac{A}{4} \frac{0.63}{1.37}$$

$$a + \frac{A}{4} = \frac{A}{4}\left(\frac{0.63}{1.37} + 1\right) = \frac{A}{4}\left(\frac{2}{1.37}\right) \approx$$

$$\frac{A}{4} - a = \frac{A}{4}\left(1 - \frac{0.63}{1.37}\right) = \frac{A}{4}\left(\frac{0.67}{1.37}\right)$$