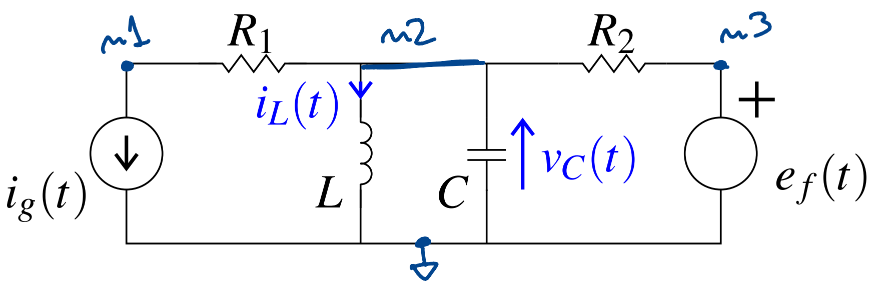
Solución

ELO102 – S1 2020 – Control #6

Problema 6.1 *Considere la red de la figura en que las condiciones iniciales son cero.*

(a) *Mediante el método de voltajes de nodo o de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red (sin modificarla).*

(b) *Determine la ecuación diferencial que satisface el voltaje en el condensador o la que satisface la corriente por el inductor.*



(a) Mediante voltajes de nodo:

→ definimos el nodo de referencia como en la figura y numeramos los nodos

→ Hacemos LCK en cada nodo y los escribimos en función de los tres voltajes de nodos: $\{v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}\}$

→ LCK: (n1) $\quad \dfrac{v_{n1} - v_{n2}}{R_1} = -i_g$

(n2) $\quad \dfrac{v_{n2} - v_{n1}}{R_1} + \dfrac{1}{L}\int v_{n2}\, d\tau + C\dfrac{d}{dt} v_{n2} + \dfrac{v_{n2} - v_{n3}}{R_2} = 0$

(n3) $\quad v_{n3} = e_f \quad$ (dato)

Con eso tenemos 3 ecuaciones l.i. y 3 incógnitas

(o bien 2 " " " 2 ")

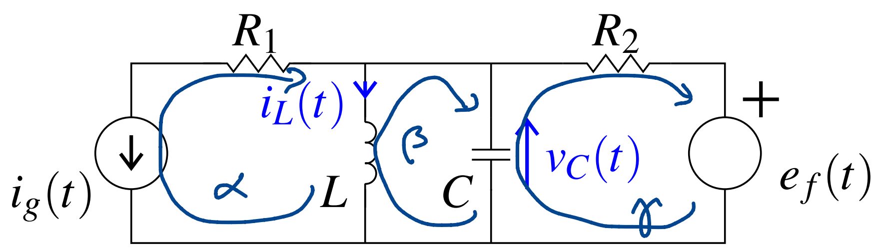
Solución

ELO102 – S1 2020 – Control #6

Problema 6.1 *Considere la red de la figura en que las condiciones iniciales son cero.*

(a) Mediante el método de voltajes de nodo o de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red (sin modificarla).

(b) Determine la ecuación diferencial que satisface el voltaje en el condensador o la que satisface la corriente por el inductor.



(a) Mediante corrientes de malla

- definimos las corrientes en cada una de las tres mallas, y
- hacemos LVK en cada una de las mallas:

(α) — $i_\alpha(t) = -i_g(t)$ (dato)

(β) $L\frac{d}{dt}(i_\beta - i_\alpha) + \frac{1}{C}\int(i_\beta - i_\gamma)\,d\tau = 0$

(γ) $\frac{1}{C}\int(i_\gamma - i_\beta)\,d\tau + R_2 i_\gamma = -e_f$

Con eso tenemos 3 ecuaciones l.i. y 3 incógnitas
(o bien 2 〃 〃 〃 2 〃)

Solución

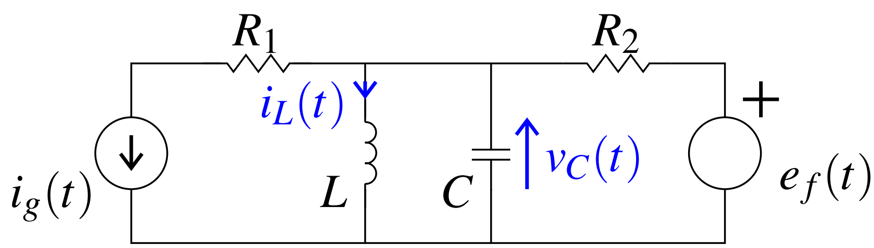
JYE – 9 de julio de 2020

ELO102 – S1 2020 – Control #6

Problema 6.1 *Considere la red de la figura en que las condiciones iniciales son cero.*

(a) *Mediante el método de voltajes de nodo o de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red (sin modificarla).*

(b) *Determine la ecuación diferencial que satisface el voltaje en el condensador o la que satisface la corriente por el inductor.*



(b) Si se usó voltajes de nodo, es conveniente obtener la ecuación para $v_c(t) = v_{n2}(t)$

De hecho, de las ecuaciones planteadas antes, se despeja:

$$i_g(t) + \frac{1}{L}\int v_{n2}\, d\tau + C\frac{d}{dt}v_{n2} + \frac{v_{n2} - e_g}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}i_g + \frac{1}{L}v_{n2} + C\frac{d^2}{dt^2}v_{n2} + \frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}v_{n2} - \frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}e_g = 0$$

$$\Rightarrow C\frac{d^2}{dt^2}v_c + \frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}v_c + \frac{1}{L}v_c = \frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}e_g - \frac{d}{dt}i_g$$

//

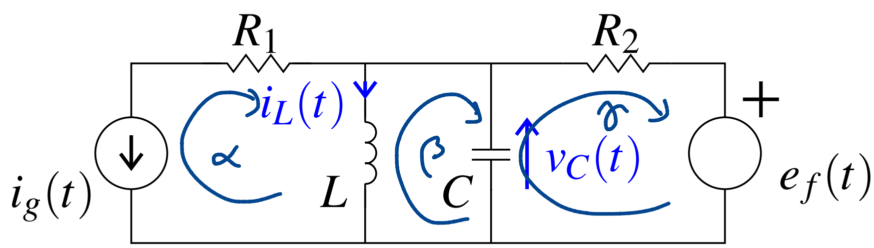
Solución

ELO102 – S1 2020 – Control #6

Problema 6.1 *Considere la red de la figura en que las condiciones iniciales son cero.*

(a) *Mediante el método de voltajes de nodo o de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red (sin modificarla).*

(b) *Determine la ecuación diferencial que satisface el voltaje en el condensador o la que satisface la corriente por el inductor.*



(b) Si se usó corrientes de malla, puede ser más fácil obtener la EDO para $i_L(t) = i_\alpha - i_\beta = -i_g - i_\beta$

$$L\frac{d}{dt}(i_\beta + i_g) + \frac{1}{C}\int(i_\beta - i_\gamma)\,d\tau = 0$$

$$\frac{1}{C}\int(i_\gamma - i_\beta)\,d\tau + R_2 i_\gamma = -e_f$$

usando operadores D y D^{-1}

$$LD i_\beta + \frac{1}{C}D^{-1} i_\beta - \frac{1}{C}D^{-1} i_\gamma = -LD i_g$$

$$\frac{1}{C}D^{-1} i_\gamma - \frac{1}{C}D^{-1} i_\beta + R_2 i_\gamma = -e_f$$

de la 2da ecuación: $i_\gamma = \dfrac{-e_f + \frac{1}{C}D^{-1} i_\beta}{\frac{1}{C}D^{-1} + R_2}$

en la 1era ecuación:

$$LD i_\beta + \frac{1}{C}D^{-1} i_\beta - \frac{1}{C}D^{-1}\frac{\left(-e_f + \frac{1}{C}D^{-1} i_\beta\right)}{\frac{1}{C}D^{-1} + R_2} = -LD i_g$$

$$\left(LD + \frac{1}{C}D^{-1}\right)\left(\frac{1}{C}D^{-1} + R_2\right) i_\beta - \frac{1}{C}D^{-1}\left(-e_f + \frac{1}{C}D^{-1} i_\beta\right) = \left(\frac{1}{C}D^{-1} + R_2\right)\left(-LD i_g\right)$$

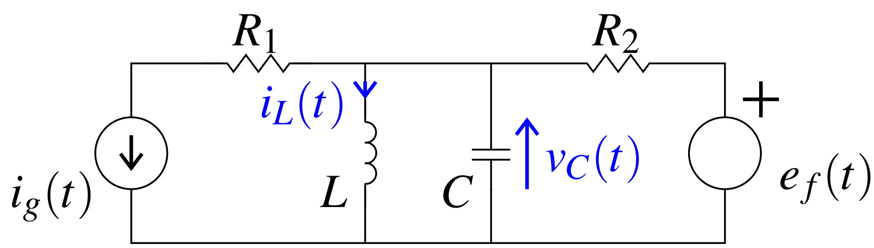
Solución

ELO102 – S1 2020 – Control #6

Problema 6.1 *Considere la red de la figura en que las condiciones iniciales son cero.*

(a) *Mediante el método de voltajes de nodo o de corrientes de malla, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red (sin modificarla).*

(b) *Determine la ecuación diferencial que satisface el voltaje en el condensador o la que satisface la corriente por el inductor.*



(continuación)

$$\left(LD+\frac{1}{C}D^{-1}\right)\left(\frac{1}{C}D^{-1}+R_2\right)i_\beta-\frac{1}{C}D^{-1}\left(-e_f+\frac{1}{C}D^{-1}i_\beta\right)=\left(\frac{1}{C}D^{-1}+R_2\right)\left(-LD\,i_g\right)$$

$$\left[\frac{L}{C}+\cancel{\frac{1}{C^2}D^{-2}}+LR_2D+\frac{R_2}{C}D^{-1}-\cancel{\frac{1}{C^2}D^{-2}}\right]i_\beta=-\frac{L}{C}i_g-LR_2D\,i_g-\frac{1}{C}D^{-1}e_f$$

$$\left[LR_2D^2+\frac{L}{C}D+\frac{R_2}{C}\right]i_\beta=-\frac{L}{C}D\,i_g-LR_2D^2i_g-\frac{1}{C}e_f$$

pero $\quad i_\beta=-i_g-i_L$

$$\left[LR_2D^2+\frac{L}{C}D+\frac{R_2}{C}\right](i_g+i_L)=\left(\frac{L}{C}D+LR_2D^2\right)i_g+\frac{1}{C}e_f$$

$$\left[LR_2D^2+\frac{L}{C}D+\frac{R_2}{C}\right]i_L=\frac{1}{C}e_f-\frac{R_2}{C}i_g$$

para que se parezca a la EDO obtenida para $v_C(t)$ se puede reescribir como:

$$\left[CD^2+\frac{1}{R_2}D+\frac{1}{L}\right]i_L=\frac{1}{LR_2}e_f-\frac{1}{L}i_g$$

$$C\frac{d^2}{dt^2}i_L+\frac{1}{R_2}\frac{d}{dt}i_L+\frac{1}{L}i_L=\frac{1}{LR_2}e_f-\frac{1}{L}i_g$$