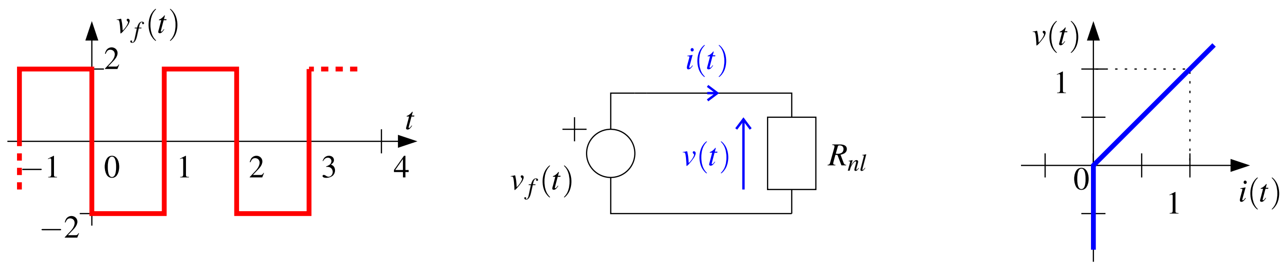
Solución

ELO102 – S1 2020 – Examen Final

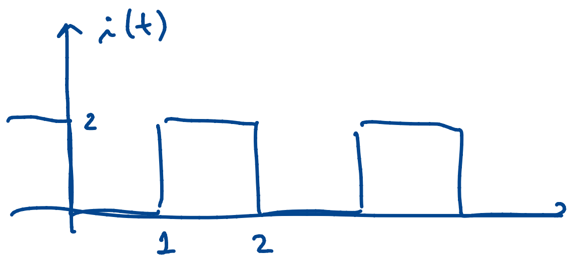
Problema 1 *En la red de la figura, la fuente de voltaje está dada por el gráfico a la izquierda y la componente no lineal tiene la característica dada en el gráfico a la derecha. Determine el valor efectivo de la corriente por R_{nl}.*



- Notamos en primer lugar que, del gráfico de la derecha, la componente no lineal R_{nl}: si $v(t)>0$ es una resistencia de $1\,[\Omega]$ y si $v(t)<0$ es un circuito abierto ($i(t)=0$)

- Por tanto, cuando $v_f(t)=v(t)=2 \Rightarrow i(t) = \dfrac{2\,[V]}{1\,[\Omega]} = 2\,[A]$

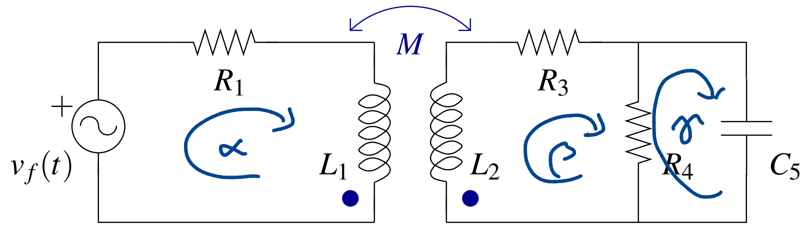
  y cuando $v_f(t) = -2 < 0 \Rightarrow i(t) = 0$



- Entonces el valor efectivo es

$$i_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{1}{2}\int_1^2 2^2\,dx} = \sqrt{2}$$

Problema 2 *En la figura, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



- Un sistema de ecuaciones consistente puede obtenerse mediante:
  - voltajes de nodos,
  - corrientes de malla, o
  - planteando LVK, LCK y ley de componentes (III)

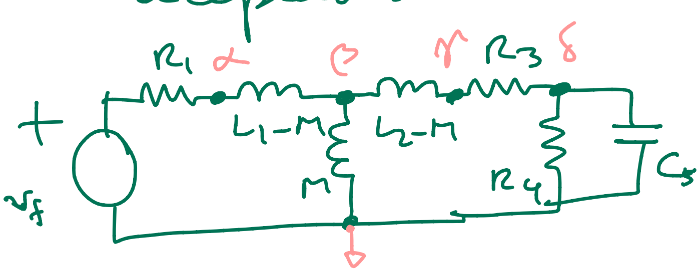
- Mediante corrientes de malla tenemos que:

$$\alpha: \quad R_1 i_\alpha + L_1 \frac{di_\alpha}{dt} - M\frac{di_\beta}{dt} = v_f(t)$$

$$\beta: \quad L_2 \frac{di_\beta}{dt} - M\frac{di_\alpha}{dt} + R_3 i_\beta + R_4(i_\beta - i_\gamma) = 0$$

$$\gamma: \quad R_4(i_\gamma - i_\beta) + \frac{1}{C_5}\int i_\gamma \, dt = 0$$

- Para aplicar voltajes de nodos es conveniente primero usar la equivalencia T de los inductores acoplados:



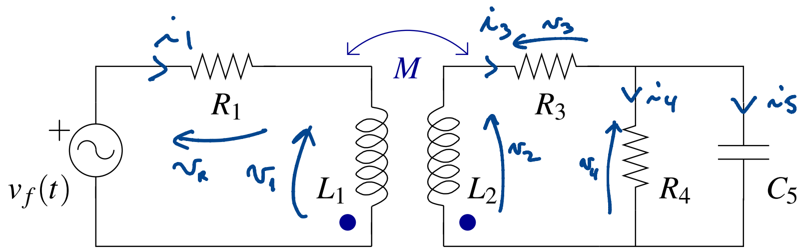
$$\alpha: \quad \frac{v_\alpha - v_f}{R_1} + \frac{1}{L_1-M}\int (v_\alpha - v_\beta)d\tau = 0$$

$$\beta: \quad \frac{1}{L_1-M}\int (v_\beta - v_\alpha) + \frac{1}{M}\int v_\beta d\tau + \frac{1}{L_2-M}\int (v_\beta - v_\gamma) = 0$$

$$\gamma: \quad \frac{1}{L_2-M}\int (v_\gamma - v_\beta) + \frac{v_\gamma - v_\delta}{R_3} = 0$$

$$\delta: \quad \frac{v_\delta - v_\gamma}{R_3} + \frac{v_\delta}{R_4} + C_5\frac{d}{dt}v_\delta = 0$$

Problema 2 *En la figura, determine un sistema de ecuaciones consistente que permita analizar la red.*



(continuación)

Alternativamente, se pueden plantear ecuaciones usando las señales definidas en la figura:

LVK : $v_f = v_R + v_1$

$v_2 = v_3 + v_4$

LCK : $i_3 = i_4 + i_5$

III : $v_R = R_1 i_1$

$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_3}{dt}$

$v_2 = -L_2 \frac{di_3}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$

$v_3 = R_3 i_3$

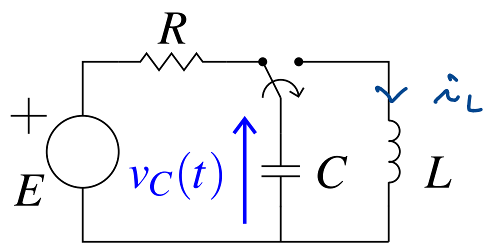
$v_4 = R_4 i_4$

$i_5 = C \frac{dv_4}{dt}$

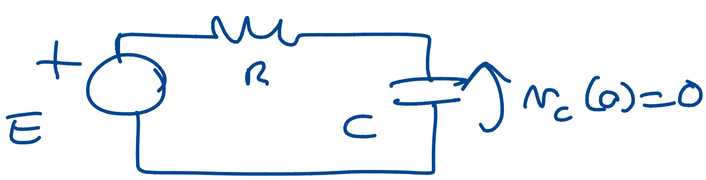
9 ecuaciones l.i.

9 incógnitas : $\{ i_1, i_3, i_4, i_5, v_R, v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

Problema 3 *En la red de la figura, la fuente de voltaje es constate, $v_C(0) = 0$ y el interruptor cambia de posición en $t = RC$. Grafique el voltaje en el condensador $v_C(t)$ para $t \geq 0$.*



- Para $0 \leq t < \tau = RC$ tenemos el circuito RC

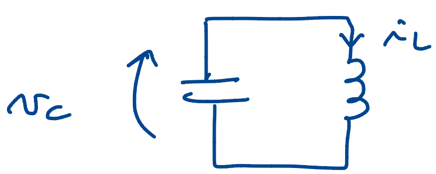


⊛ Note que $i_L = 0$

$$\Rightarrow \; v_c(t) = v_c(\infty) + (v_c(0) - v_c(\infty))\, e^{-t/\tau}$$
$$= E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\begin{cases} \tau = RC \\ v_c(0) = 0 \\ v_c(\infty) = E \end{cases}$$

- Para $t \geq \tau = RC$ tenemos un circuito LC:

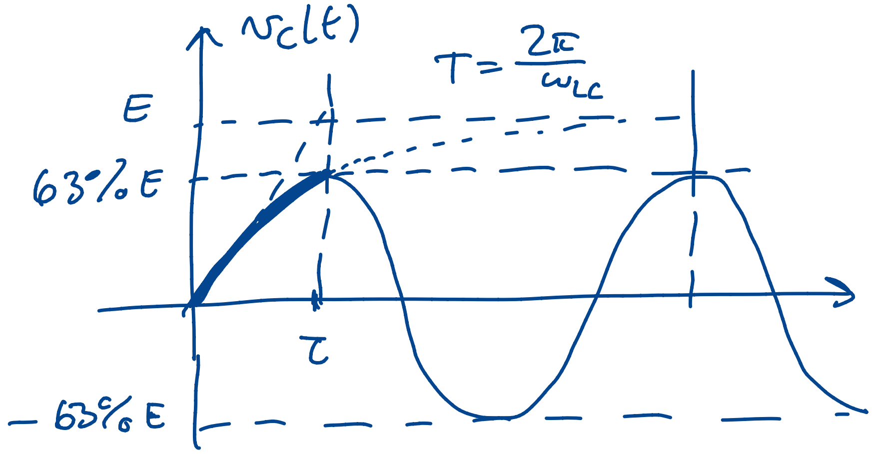


en que $v_c(\tau) = E(1 - e^{-1})$
$\approx 0.63\,E$

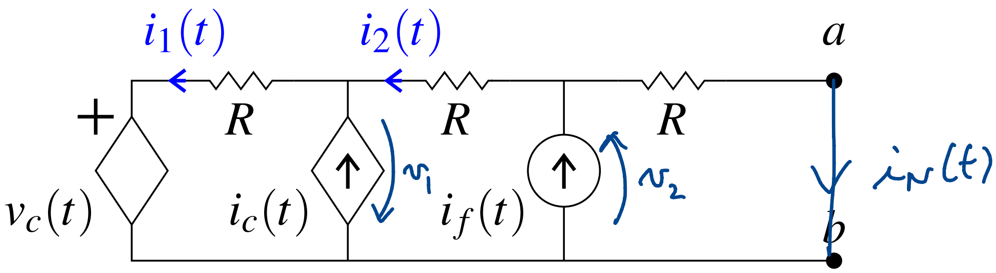
e $\; i_L(\tau) = 0 = -C \left.\dfrac{dv_c}{dt}\right|_{t=\tau}$

que se comporta como un oscilador de frecuencia $\omega_{LC} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
en que inicialmente sólo hay energía en el condensador

- Por tanto:



Problema 4 *En la red de la figura,* $i_c(t) = k_1 i_1(t)$ *y* $v_c(t) = k_2 i_2(t)$*. Determine el equivalente Thévenin o Norton desde los terminales* $a - b$*.*



Corriente Norton:

$i_N(t)$ / Obtenemos la corriente de cortocircuito:

por mallas

$$
\left.
\begin{aligned}
k_2 i_2 + R i_1 + v_1 &= 0 \\
-v_1 + R i_2 - v_2 &= 0 \\
-v_2 + R i_N &= 0 \\
i_2 + k_1 i_1 - i_1 &= 0 \\
i_2 + i_N &= i_f
\end{aligned}
\right.
$$

$(k_2 + R) i_2 + R i_1 - R i_N = 0$

$i_1 = \dfrac{i_2}{1-k_1}$

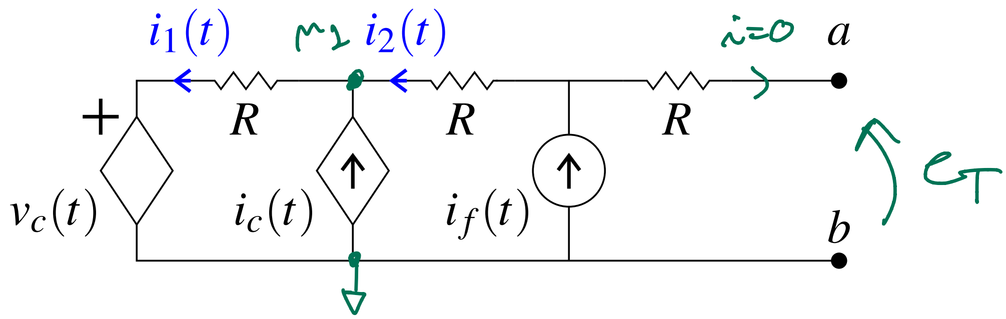
$i_2 = i_f - i_N$

$$\Rightarrow (k_2 + R)(i_f - i_N) + \frac{R}{1-k_1}(i_f - i_N) - R i_N = 0$$

$$i_N \left(-(k_2 + R) + \frac{R}{k_1 - 1} - R \right) = -(k_2 + R) i_f + \frac{R}{k_1 - 1} i_f$$

$$i_N = \frac{\frac{R}{k_1-1} - (k_2 + R)}{\frac{R}{k_1-1} - k_2 - 2R} \, i_f$$

Problema 4 *En la red de la figura, $i_c(t) = k_1 i_1(t)$ y $v_c(t) = k_2 i_2(t)$. Determine el equivalente Thévenin o Norton desde los terminales $a - b$.*



Voltaje Thévenin:

$\underline{e_T(t)}$ Obtenemos el voltaje de circuito abierto:

$$i_1 - i_c - i_2 = 0 \Rightarrow (1-k_1)\, i_1 - i_f = 0$$

$$i_1 = \frac{v_{n1} - v_c}{R} \qquad \Rightarrow i_1 = \frac{i_f}{1-k_1}$$

$$i_2 = \frac{e_T - v_{n1}}{R}$$

$$v_c = k_2 i_2$$

$$i_c = k_1 i_1$$

$$i_2 = i_f$$

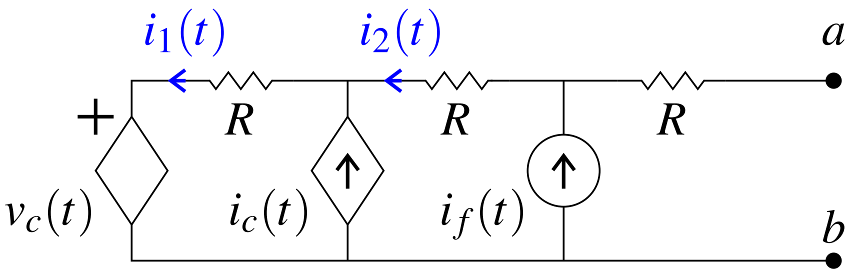
$$\frac{i_f}{1-k_1} = \frac{v_{n1} - k_2 i_f}{R}$$

$$\Rightarrow v_{n1} = \frac{R}{1-k_1} i_f + k_2 i_f$$

$$e_T = R\, i_f + \frac{R}{1-k_1} i_f + k_2 i_f$$

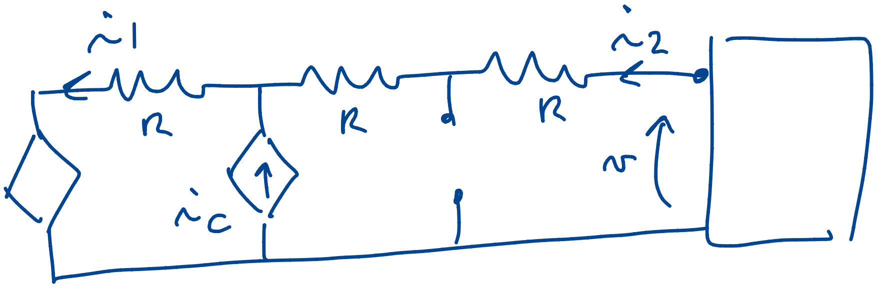
$$= \left(R + \frac{R}{1-k_1} + k_2\right) i_f$$

Problema 4 *En la red de la figura, $i_c(t) = k_1 i_1(t)$ y $v_c(t) = k_2 i_2(t)$. Determine el equivalente Thévenin o Norton desde los terminales $a - b$.*



Si calculamos la red relajada R_r:

($i_f = 0$)



$$v_c + R i_1 + 2R i_2 = v$$

$$i_1 = i_c + i_2$$

$$v_c = k_2 i_2$$

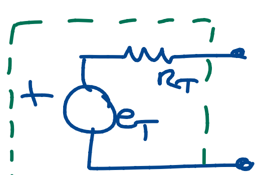
$$i_c = k_1 i_1$$

$\rightarrow (1-k_1) i_1 = i_2$

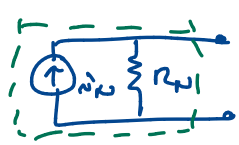
$$\Rightarrow k_2 i_2 + R \frac{i_2}{1-k_1} + 2R i_2 = v$$

$$\underbrace{\left(k_2 + \frac{R}{1-k_1} + 2R\right)}_{R_T = R_N} i_2 = v$$

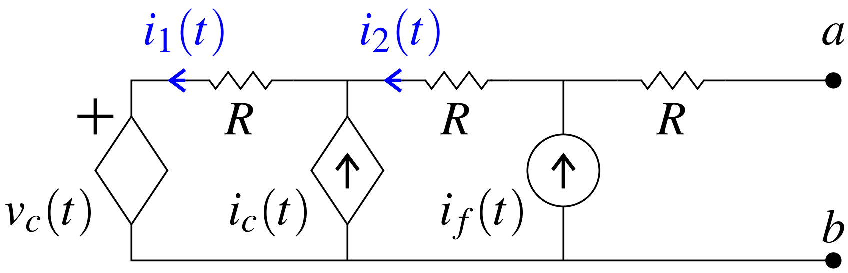
$\hat{=}$



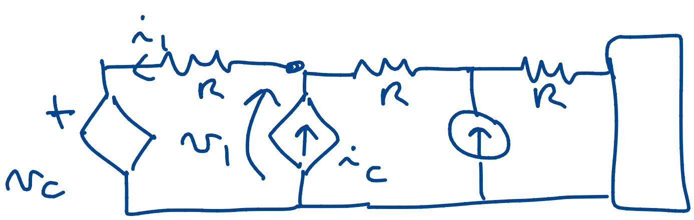
$\hat{=}$



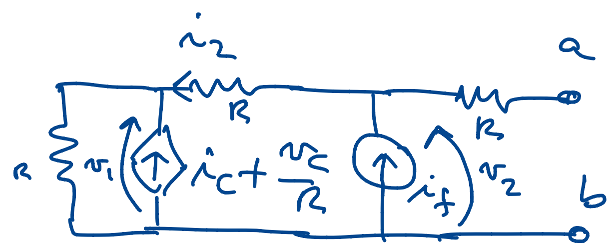
Problema 4 *En la red de la figura, $i_c(t) = k_1 i_1(t)$ y $v_c(t) = k_2 i_2(t)$. Determine el equivalente Thévenin o Norton desde los terminales $a-b$.*



... Alternativamente, se puede usar equivalencias pero transformando las variables clave (i_1 e i_2):



$\hat{=}$



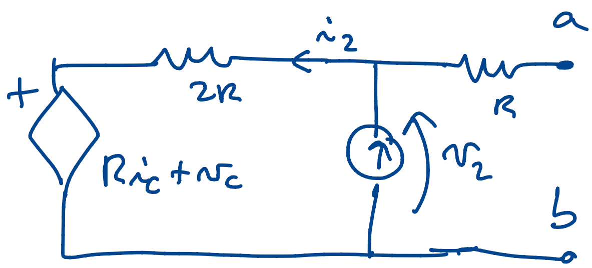
$$v_1 = v_c + R i_1$$

$$\Rightarrow \quad i_1 = \frac{v_1 - v_c}{R}$$

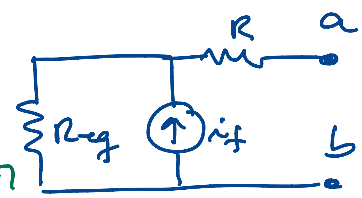
$$v_2 = v_1 + R i_2$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = v_2 - R i_2$$

$\hat{=}$



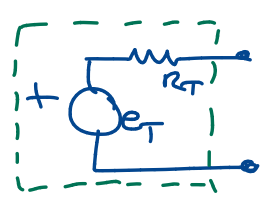
$\hat{=}$



donde
$$\begin{aligned} v_2 &= R i_c + v_c + 2R i_2 \\ &= R(k_1 i_1) + k_2 i_2 + 2R i_2 \\ &= \cancel{R} k_1 \left(\frac{v_1 - v_c}{\cancel{R}}\right) + (k_2 + 2R) i_2 \\ &= k_1 (v_2 - R i_2) + (k_2 + 2R) i_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_2}{i_2} = \frac{-k_1 R + k_2 + 2R}{1 - k_1} = R_{eq}$$

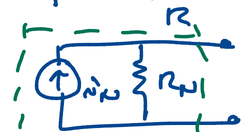
$\hat{=}$



$R_T = R + R_{eq}$

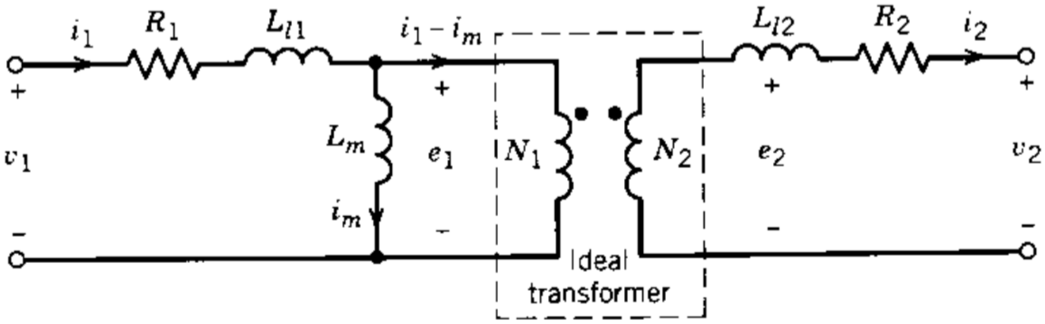
$e_T = \frac{i_f}{R}$

$\hat{=}$

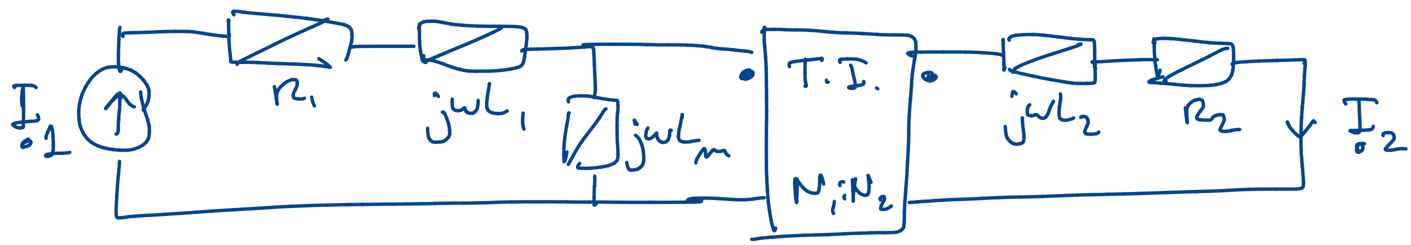


$R_N = R_T \quad i_N = e_T / R_T$

Problema 5 *Considere el modelo de un transformador real que se muestra en la figura. En el primario (puerto de conexión en el extremo izquierdo) se sabe que $i_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Determine la corriente Norton en estado estacionario en el secundario (puerto de conexión en el extremo derecho).*



en el dominio de la transformada fasorial:



en que $\dot{I}_1 = \frac{A}{\sqrt{2}}\angle\phi$ y nos interesa obtener $\dot{I}_2$

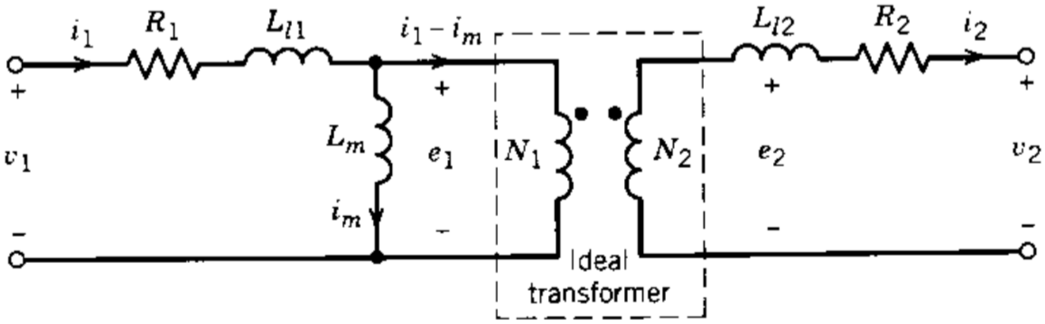
Note que R_1 y $j\omega L_1$ son redundantes pues están en serie con $\dot{I}_1$

$$\tilde{\dot{I}}_1 = \dot{I}_1 - \frac{\dot{V}_1}{j\omega L_m}$$ pero $\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{N_1}{N_2}$ e $\frac{\tilde{\dot{I}}_1}{\dot{I}_2} = \frac{N_2}{N_1}$

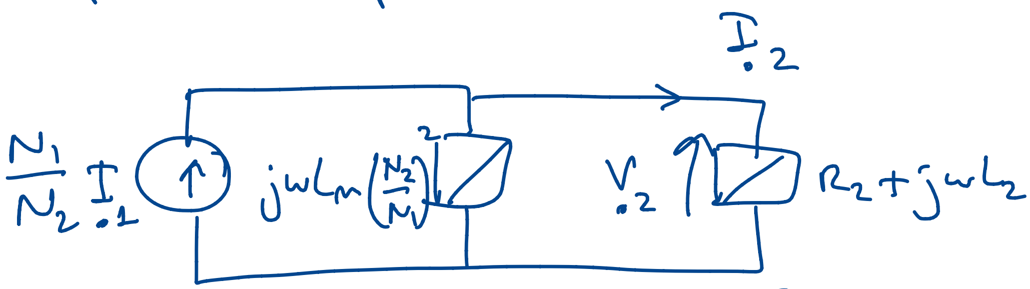
$$\Rightarrow \frac{N_2 \dot{I}_2}{N_1} = \dot{I}_1 - \frac{\frac{N_1}{N_2}\dot{V}_2}{j\omega L_m}$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{N_1}{N_2}\dot{I}_1 - \frac{\dot{V}_2}{j\omega L_m \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}$$

Problema 5 *Considere el modelo de un transformador real que se muestra en la figura. En el primario (puerto de conexión en el extremo izquierdo) se sabe que $i_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Determine la corriente Norton en estado estacionario en el secundario (puerto de conexión en el extremo derecho).*



... que corresponde a reflejar en el secundario la red del primario:



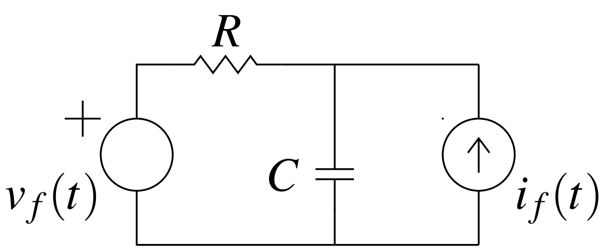
$$\Rightarrow \quad \underset{\cdot}{I}_2 = \frac{j\omega L_m\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}{R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_m\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2} \; \frac{N_1}{N_2}\underset{\cdot}{I}_1$$

$$|\underset{\cdot}{I}_2| = \frac{\omega L_m \frac{N_2}{N_1} \quad \frac{A}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R_2^2 + \left(\omega L_2 + \omega L_m\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2\right)^2}}$$

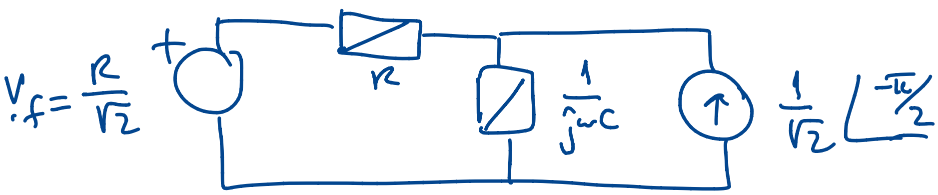
$$\measuredangle \underset{\cdot}{I}_2 = \frac{\pi}{2} + \phi - \operatorname{Arctg}\left(\frac{\omega L_2 + \omega L_m\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad i_2(t) = \sqrt{2}\; |\underset{\cdot}{I}_2| \cos(\omega t + \measuredangle \underset{\cdot}{I}_2)$$

Problema 6 *En la red de la figura, $v_f(t) = R\cos(\omega t)$ e $i_f(t) = \sin(\omega t)$. Si $\omega = \frac{1}{RC}$, determine cuál de las dos fuentes entrega mas potencia promedio en estado estacionario.*

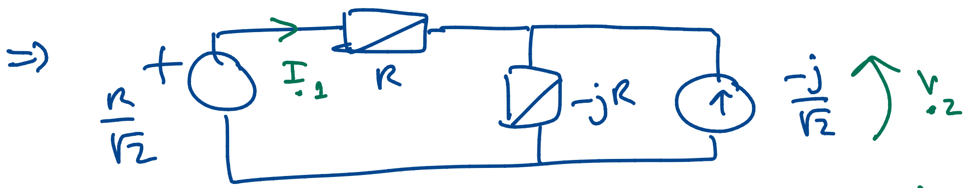


- Ambas fuentes son sinusoidales y de la misma frecuencia. Por tanto, la potencia promedio en e.e. entregada por cada una corresponde a la POTENCIA ACTIVA entregada por cada una de ellas.
- En el dominio de la transformada fasorial:



en que $\omega = \frac{1}{RC}$

$\Rightarrow$



Por superposición: (aplicando div. de voltajes y de corrientes)

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{R-jR}\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) - \frac{(-jR)}{R-jR}\left(\frac{-j}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\dot{V}_2 = \frac{-jR}{R-jR}\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right) + \frac{R(-jR)}{R-jR}\left(\frac{-j}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{2R}{\sqrt{2}(R-jR)} = \frac{2}{2\angle{-\pi/4}} = 1\angle{\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{V}_2 = \frac{R(-jR-R)}{\sqrt{2}(R-jR)} = \frac{-R\sqrt{2}\angle{\pi/4}}{2\angle{-\pi/4}} = -\frac{R\sqrt{2}}{2}\angle{\pi/2} = -\frac{R\sqrt{2}}{2}j$$

$$\Rightarrow \dot{P}_1 = \dot{V}_f \dot{I}_1^* = \frac{R}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R}{2} - j\frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{P}_2 = \dot{V}_2(\dot{I}_f)^* = -\frac{R\sqrt{2}}{2}j\left(\frac{j}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R}{2}$$

ambas fuentes entregan la misma potencia promedio