Control Automático I - 2do semestre 2006

Primer Certamen y soluciones

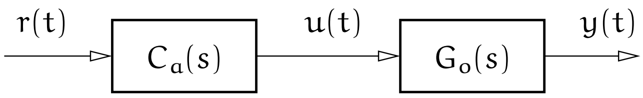


Figura 1: Lazo abierto.

Problema 1.1 (10 pts.) Considere un sistema de **control en lazo abierto** como en la Figura 1, con modelo de planta $G_o(s)$ y controlador $C_a(s)$, cuyas respuestas en frecuencia (magnitudes) aparecen en la Figura 2.

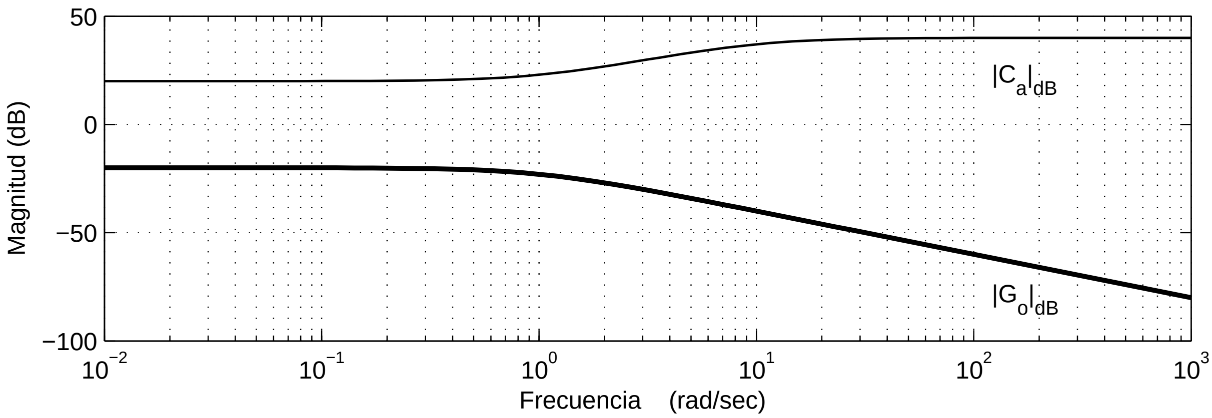


Figura 2: Respuestas en frecuencia de $G_o(s)$ y $C_a(s)$.

Si la referencia es una sinusoide $r(t) = A\cos(\omega_o t + \alpha)$, estime el rango de frecuencias en el cual la salida estacionaria es $y(t) \approx A\cos(\omega_o t + \alpha - \beta)$, es decir, cuando la salida sigue a la referencia con un retardo cualquiera, calculable como β/ω_o.

Solución

La clave es la idea de inverso. Dado que no importa que haya retardo, lo que interesa es que $|G_o(j\omega)C_a(j\omega)| \approx 1$. *Esto se logra si y sólo si* $|G_o(j\omega)|_{dB} \approx -|C_a(j\omega)|_{dB}$. *De la figura, se observa que esto se cumple en la banda* $[0; 10]$ $[rad/s]$.

Problema 1.2 (10 pts.) Una planta con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ satisface la relación

$$\frac{dy(t)}{dt} = e^{u(t-1)} - \alpha y(t)$$

donde $\alpha > 0$.

Determine un controlador de lazo abierto que permita seguir **en estado estacionario referencias constantes positivas**.

Solución

Para obtener dicho controlador es necesario invertir la respuesta estacionaria de la planta a frecuencia cero. Note que el controlador no puede invertir el retardo temporal.

Debemos conseguir:

$$y_{ee} = r$$

Por tanto,

$$0 = e^{u} - \alpha r \quad \Rightarrow \quad u = \log|\alpha r|$$

Esta ecuación define el controlador de lazo abierto.

Note que un controlador que entrega un mejor transiente puede obtenerse reescribiendo el sistema como

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \tilde{u}(t)$$
$$\tilde{u}(t) = e^{u(t-1)}$$

donde es posible lograr una mejor inversa ***aproximada*** *del bloque lineal (pues el controlador debe ser propio) y de la nolinealidad:*

$$u(t) = \log|\tilde{r}(t)|$$
$$\frac{\tilde{R}(s)}{R(s)} = \frac{s+\alpha}{\tau s + 1}$$

en que $\tau << 1/\alpha$.

Problema 1.3 (10 pts.) En un lazo de control se sabe que

$$T_o(s) = \frac{2(s^2 + 0,5s + 0,5)}{(s+1)^2}$$

Suponiendo que $r(t) = d_i(t) = d_m(t) = 0$. ¿Cuánto es la amplitud del error estacionario para una perturbación $d_o(t) = 3\cos(t - 0,2\pi)$?

Solución

El error estacionario depende de la sensibilidad nominal

$$S_o(s) = 1 - T_o(s) = \frac{-s^2 + s}{(s+1)^2}$$

Por tanto, la amplitud buscada A *es igual a*

$$A = 3|S_o(j)| = 3\left|\frac{1+j}{(j+1)^2}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Problema 1.4 (10 pts.) Para un sistema $G_o(s) = \frac{10}{s+10}$ se ha diseñado un lazo de control de manera tal que $T_o(s) = \frac{100}{s+100}$. Estime el rango de frecuencias posible para una sinusoide de referencia $r(t) = \cos(\omega_r t)$ de manera que, en estado estacionario, la amplitud de la entrada a la planta sea menor que $\sqrt{10}$. Si usa diagramas de Bode, basta la aproximación asintótica de los mismos.

Solución

La amplitud estacionaria de la entrada de la planta queda determinada por la sensibilidad de entrada nominal

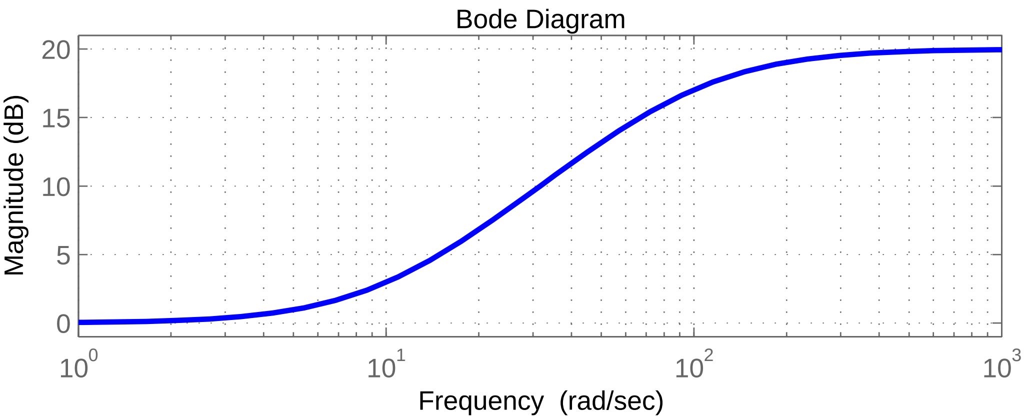
$$S_{uo}(s) = \frac{T_o(s)}{G_o(s)} = \frac{10(s+10)}{s+100} = \frac{\frac{s}{10}+1}{\frac{s}{100}+1}$$

De esta forma la amplitud estacionaria de la entrada es igual a $|u_{ee}| = |S_{uo}(j\omega_r)|$*. Ahora bien*

$$|S_{uo}(j\omega_r)| < \sqrt{10} \iff |S_{uo}(j\omega_r)|_{dB} < 20\log_{10}\sqrt{10} = 10[dB]$$

A partir del diagrama de Bode de $S_{uo}(j\omega)$*, se obtiene que*

$$|S_{uo}(j\omega_r)|_{dB} < 10[dB] \iff \omega_r < 10^{1,5} = 10\sqrt{10}$$



Alternativamente, es posible evaluar directamente la sensibilidad de control a una frecuencia ω_r*:*

$$\begin{aligned} |S_{uo}(j\omega_r)| &= \frac{10\sqrt{\omega_r^2+100}}{\sqrt{\omega_r^2+10000}} < \sqrt{10} \\ \Rightarrow \quad 100(\omega_r^2+100) &< 10(\omega_r^2+10000) \\ 90\omega_r^2 &< 90000 \\ \omega_r &< 10\sqrt{10} \end{aligned}$$

Problema 1.5 (10 pts.) En un lazo de control realimentado, se sabe que

$$C(s) = K\frac{s+\alpha}{s+10}; \quad G_o(s) = \frac{1}{s^2}$$

Calcule, si existen, las condiciones que deben cumplir las constantes reales K y α para que el lazo sea internamente estable.

Solución

Basta asegurar que $A_{cl}(s)$ *tiene todas sus raíces en el SPI abierto*

$$A_{cl}(s) = s^2(s+10) + K(s+\alpha) = s^3 + 10s^2 + Ks + K\alpha$$

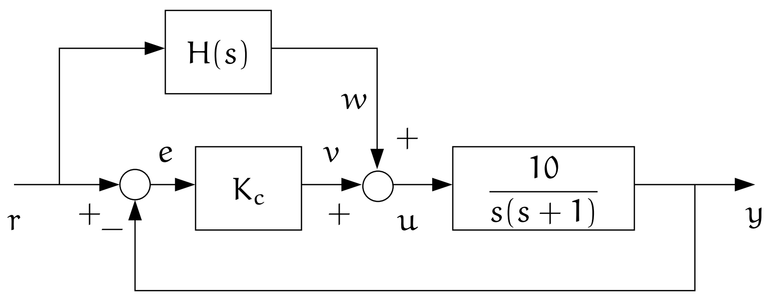
Lo primero es que K *debe ser mayor que cero (condición necesaria), para que todos los coeficientes de* $A_{cl}(s)$ *sean positivos.*

Luego, podemos usar Routh

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & K \\ s^2 & 10 & K\alpha \\ s^1 & \frac{(10-\alpha)K}{10} & \\ s^0 & K\alpha & \end{array}$$

El lazo es estable si y sólo si todos los elementos de la primera columna son positivos. Esto se satisface si y sólo si $K > 0$ *y* $0 < \alpha < 10$.

Problema 1.6 (10 pts.) Considere el lazo de control



1.6.1 Suponga que el lazo es internamente estable, que $H(s)$ es una función de transferencia estable y que $r(t) = \mu(t)$. Determine el valor estacionario que alcanza cada una de las señales que se indican en la figura.

1.6.2 Determine condiciones sobre K_c y la función de transferencia $H(s)$ de manera que el lazo siga perfectamente la referencia constante.

Solución

Dado que la planta posee un polo en el origen en estado estacionario necesariamente $u = 0$. *Por tanto, se pueden plantear las ecuaciones:*

$$\begin{aligned} v + w &= 0 \\ w &= H(0)\, r \quad \textit{(pues } H(s) \textit{ es estable)} \\ v &= K_c\, e \\ e &= r - y \end{aligned}$$

De donde se obtiene

$$K_c\,(r-y)+H(0)\,r=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{K_c+H(0)}{K_c}\,r$$

En resumen, en estado estacionario

$$r=1 \qquad u=0 \qquad w=H(0) \qquad y=\frac{K_c+H(0)}{K_c} \qquad e=\frac{-H(0)}{K_c}$$

Entonces se aprecia que el error estacionario para referencia constante es cero si $H(0)=0$ *y* $K_c\neq 0$.

Problema 1.7 (10 pts.) En un lazo de control realimentado se tiene que $r(t)=K_o$, $d_o(t)=K_1+K_2\cos(2t-\alpha)+K_3\cos(3t-\beta)$, donde K_o, K_1, K_2, K_3, α y β son constantes reales, pero desconocidas.

Con los datos disponibles, especifique todas las condiciones que debe cumplir $S_o(s)$ para que el error estacionario converja a cero.

Solución

Antes que nada $S_o(s)$ *debe ser estable. Además debe ser cero en todas las frecuencias de referencia y perturbaciones, por lo tanto debe tener ceros en* $s=0$, $s=\pm j2$ *y* $s=\pm j3$.

Problema 1.8 (10 pts.) En un lazo de control realimentado, sin cancelaciones, se tiene que

$$G_o(s)C(s)=K\frac{-s+4}{(s+1)(s+8)}$$

¿Existe un valor de $K\in\mathbb{R}^+$ tal que los polos del lazo cerrado estén en $-1\pm j$?

Solución

Una solución es analizar $A_{cl}(s)$ *y las condiciones buscadas son las que permiten que sea factorizable por* $(s+1-j)(s+1+j)=s^2+2s+2$

$$A_{cl}(s)=s^2+(9-K)s+4K+8$$

de donde se ve que se necesita $9-K=2$ *y* $4K+8=2$, *condiciones que no se pueden satisfacer simultáneamente.*

Una forma alternativa de solucionar este problema es aplicar la condición de ángulo

$$\phi=\angle\{G_o(-1+j)C(1+j)\}=(2k+1)\pi, \qquad \textit{para algún } k \textit{ entero}$$

Resulta

$$G_o(-1+j)C(1+j)=\frac{5-j}{j(7+j)} \Longrightarrow \phi=-0{,}5\pi-\arctan(1/7)-\arctan(1/5)$$

Note que $-\pi<\phi<0$. *En consecuencia, no existe tal* K.

Problema 1.9 (10 pts.) En un lazo de control realimentado se sabe que

- El espectro de la referencia es sólo significativo en $[0; 5]$ $[\mathrm{rad/s}]$
- El espectro de la perturbación de entrada es sólo significativo en $[0; 3]$ $[\mathrm{rad/s}]$
- El espectro de la perturbación de salida es sólo significativo en $[0; 7]$ $[\mathrm{rad/s}]$
- El espectro del ruido de medición es sólo significativo en $[25; 200]$ $[\mathrm{rad/s}]$

Indique con precisión, qué condición impone cada una de estas especificaciones sobre el ancho de banda de $T_o(s)$. Señale luego, qué ancho de banda elegiría.

Solución

- *El espectro de la referencia exige un Bw mayor que 5* $[\mathrm{rad/s}]$
- *El espectro de la perturbación de entrada exige un Bw mayor que 3* $[\mathrm{rad/s}]$
- *El espectro de la perturbación de salida exige un Bw mayor que 7* $[\mathrm{rad/s}]$
- *El espectro del ruido de medición exige un Bw menor que 25* $[\mathrm{rad/s}]$

Por lo tanto el Bw de T_o *debería estar entre* 7 *y* 25 $[\mathrm{rad/s}]$

Problema 1.10 (10 pts.) En un lazo de control realimentado se sabe que

$$G_o(s)C(s) = K\frac{(s-4)^2}{s(s+1)(s+6)}$$

Construya el LGR para $K \in \mathbb{R}^+$. El diagrama debe ser cualitativamente correcto y se debe justificar con las reglas de construcción analizadas en clases.

Solución

El problema es de la forma $1 + \lambda F(s) = 0$, donde

$$F(s) = \frac{(s-4)^2}{s(s+1)(s+6)}$$

y $\lambda = K \in \mathbb{R}^+$. Por lo tanto:

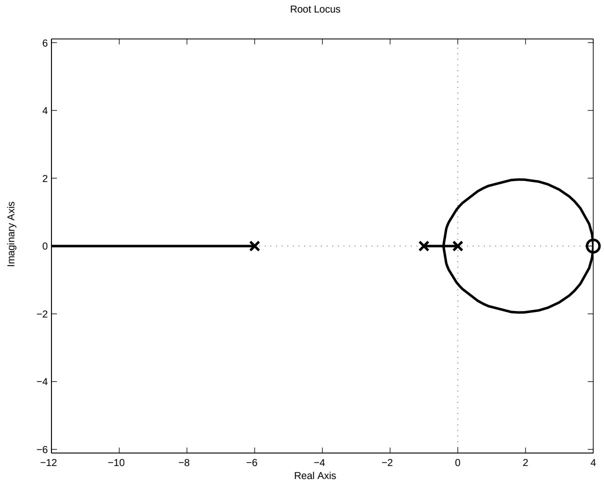
- $n = 3$, $m = 2$, por lo que el lazo cerrado tiene 3 raíces. Es decir, el LGR tiene 3 ramas.
- Como el grado relativo es $n - m = 1$, existe sólo una asíntota a ∞.
- El ángulo de la asíntota es π.
- Pertenecen al LGR los segmentos del eje real $(-1; 0))$ y $(-\infty; -6)$

Adicionalmente, el cruce del LGR con el eje imaginario puede obtenerse a partir del polinomio de lazo cerrado

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= s(s+1)(s+6) + K(s-4)^2 \\ &= s^3 + (K+7)s^2 + (6-8K)s + 16K \end{aligned}$$

utilizando el algoritmo de Routh:

$\mathbf{s^3}$	1	$6-8K$
$\mathbf{s^2}$	$K+7$	$16K$
$\mathbf{s^1}$	C_1	0
$\mathbf{s^0}$	C_2	0



Para que el polinomio de lazo cerrado sea divisible por un $(s^2 + \omega_c^2)$ para alguna ganancia crítica K_c se debe cumplir:

$$C_1 = 6 - 8K_c - \frac{16K_c}{K_c + 7} = 0$$

y la frecuencia de cruce por el eje imaginario, ω_c, está dada por la segunda fila del arreglo:

$$(K_c + 7)(j\omega_c)^2 + 16K_c = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \sqrt{\frac{16K_c}{K_c + 7}} = \sqrt{6 - 8K_c}$$

MSB/JYE/20 de septiembre de 2006