

# Control Automático I – 2do semestre 2006

## Segundo Certamen y soluciones

---

**Problema 1.1 (10 pts.)** En un lazo de control

$$G_o(s)C(s) = 0,4 \left( \frac{-s + 7}{s + 7} \right)^{30}$$

Calcule el margen de ganancia.

### Solución

La respuesta en frecuencia es  $G_o(j\omega)C(j\omega)$  es

$$G_o(j\omega)C(j\omega) = 0,4 \left( \frac{-j\omega + 7}{j\omega + 7} \right)^{30} \Rightarrow |G_o(j\omega)C(j\omega)| = 0,4 \quad ; \forall \omega$$

Por lo tanto  $M_g = -20 \log_{10}(0,4) = 8[\text{dB}]$

---

**Problema 1.2 (10 pts.)** En un lazo de control, con

$$G_o(s)C(s) = K \bar{G}_o(s)C(s),$$

se sabe que  $M_g = 4 [\text{dB}]$  cuando  $K = K_1$  (conocido).

¿Cuánto debe valer  $K$ , en función de  $K_1$ , para que  $M_g$  aumente a  $12 [\text{dB}]$  ?

### Solución

Se necesita agregar  $8 [\text{dB}]$ , o sea  $K = \alpha \cdot K_1$  donde

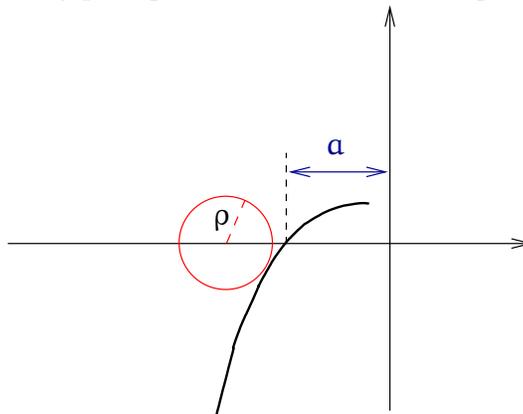
$$-20 \log_{10} \alpha = 8 \iff \alpha = 10^{-0,4} \approx 0,4$$

---

**Problema 1.3 (10 pts.)** En un lazo de control se sabe que  $M_g = 7 [\text{dB}]$ , ¿Qué puede decir del *peak* de sensibilidad?

### Solución

Considere el diagrama de Nyquist genérico mostrado en la figura



Entonces, sabemos que  $-20 \log_{10}(\alpha) = 7$  [dB]. Por lo tanto  $\rho \leq 1 - \alpha$ . Por otro lado

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \|S_o(j\omega)\| = \rho^{-1} \geq \frac{1}{1 - \alpha} \approx 1,8$$

**Problema 1.4 (10 pts.)** En un lazo de control

$$G_o(s)C(s) = \frac{2^8}{(s-2)^8}$$

¿Es el lazo estable?

### Solución

Una posibilidad es usar Nyquist. Dado que  $G_o(s)C(s)$  es inestable ( $P = 8$  polos sobre el SPD abierto), entonces el lazo cerrado es estable si y sólo si el diagrama polar de  $G_o(j\omega)C(j\omega)$  encierra el punto  $(-1;0)$  ocho veces en sentido contra-reloj. Para realizar ese análisis calculamos

$$G_o(j\omega)C(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{2} - 1\right)^8} = \frac{1}{\left(-\frac{j\omega}{2} + 1\right)^8}$$

Por lo tanto

$$|G_o(j\omega)C(j\omega)| = \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{4} + 1\right)^4}$$

$$\angle G_o(j\omega)C(j\omega) = 8 \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Se observa que la magnitud en  $\omega = 0$  es igual a 1. Además la magnitud es una función decreciente de  $\omega$ , por lo cual, cuando el diagrama polar cruza el eje real negativo, lo hace con magnitud **menor** que 1. Por lo tanto, el diagrama polar de  $G_o(j\omega)C(j\omega)$  **no** encierra el punto  $(-1;0)$ , lo cual indica que el lazo cerrado es **inestable**.

**Problema 1.5 (20 pts.)** Se ha determinado que una planta tiene modelo *real* dado por:

$$G(s) = G_o(s) + G_\varepsilon(s)$$

En la Figura 1 se muestra el diagrama de Bode del modelo nominal  $G_o$  y la sensibilidad complementaria  $T_o$ . Determine la región para la magnitud de  $G_\varepsilon$  que garantiza estabilidad robusta.

### Solución

Es posible utilizar la misma condición suficiente del teorema de estabilidad robusta notando que  $G_\Delta = G_\varepsilon/G_o$ . Por lo tanto:

$$|T_o(j\omega)| |G_\Delta(j\omega)| < 1$$

$$|T_o(j\omega)| \frac{|G_\varepsilon(j\omega)|}{|G_o(j\omega)|} < 1$$

$$|T_o(j\omega)|_{dB} + |G_\varepsilon(j\omega)|_{dB} - |G_o(j\omega)|_{dB} < 0 [dB]$$

$$\Rightarrow |G_\varepsilon(j\omega)|_{dB} < |G_o(j\omega)|_{dB} - |T_o(j\omega)|_{dB}$$

Por tanto, la región admisible se obtiene de la Figura reflejando  $T_o$  y sumando  $G_o$ :

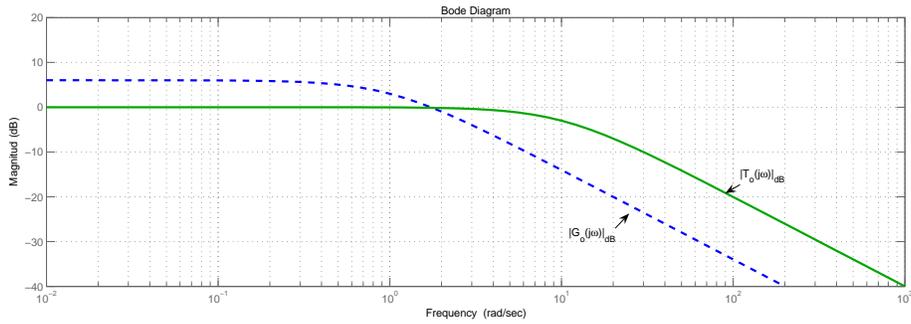
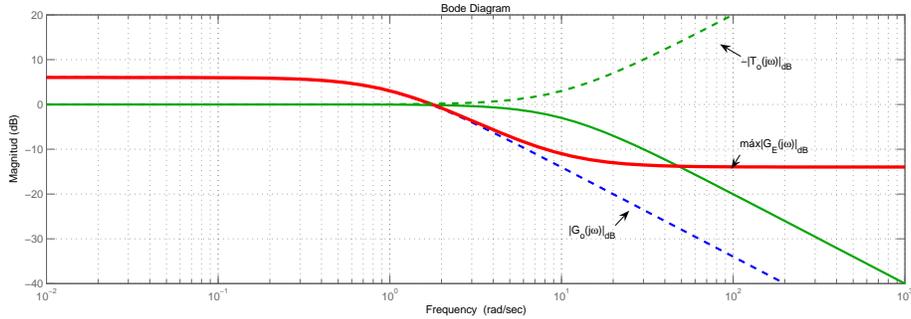


Figura 1: Diagrama de magnitud para  $G_o$  y  $T_o$ .



**Problema 1.6 (10 pts.)** Demuestre que la sensibilidad de entrada nominal  $S_{i_o}(s)$  es aproximadamente la misma que la sensibilidad de entrada real o de calibración  $S_i(s)$ , en toda la banda del lazo nominal (banda de  $T_o(j\omega)$ ).

**Solución**

Sea  $G(s) = G_o(s)(1 + G_\Delta(s))$  , entonces

$$S_{i_o}(s) = S_o(s)G_o(s); \quad S_i(s) = S(s)G(s)$$

$$S_i(s) = S(s)G(s) = S_o(s)\frac{G_o(s)(1 + G_\Delta(s))}{1 + T_o(s)G_\Delta(s)} = S_{i_o}(s)\frac{1 + G_\Delta(s)}{1 + T_o(s)G_\Delta(s)}$$

De esta última ecuación se desprende que si  $T_o(j\omega) \approx 1$ , entonces  $S_i(j\omega) \approx S_{i_o}(j\omega)$ , y esto ocurre en todo el ancho de banda del lazo en que, precisamente,  $T_o(j\omega) \approx 1$ .

**Problema 1.7 (10 pts.)** En un lazo de control se sabe que

$$G_o(s)C(s) = \frac{s^2 - 3s + 16}{s^2 + 3s + 16} \frac{8}{s + 4}$$

Dibuje el diagrama polar de  $G_o(j\omega)C(j\omega)$  tan completo como sea posible (ponga atención especialmente a la forma del diagrama polar, a los cruces en el eje real y al ángulo para  $\omega = \infty$ ).

## Solución

Observamos que

$$\begin{aligned}G_o(j\omega)C(j\omega) &= \frac{j\omega^2 - 3j\omega + 16}{j\omega^2 + 3j\omega + 16} \frac{8}{j\omega + 4} \\|G_o(j\omega)C(j\omega)| &= \frac{8}{\sqrt{\omega^2 + 16}} \\ \angle\{G_o(j\omega)C(j\omega)\} &= -\arctan(\omega/4) - 2\angle(16 - \omega^2 + j3\omega)\end{aligned}$$

El ángulo de un factor  $j\omega^2 + a j\omega + b$ , con  $a > 0$  y  $b > 0$  va desde  $0$  a  $\pi$  cuando  $\omega$  va desde  $0$  a  $\infty$ . En cambio, el ángulo de  $j\omega^2 - a j\omega + b$  va desde  $0$  a  $-\pi$  cuando  $\omega$  va desde  $0$  a  $\infty$ . Note que el ángulo de estos factores no se puede calcular usando la función  $\arctan$ , porque excede el rango en que esta función está definida (sólo en  $(-0,5\pi; 0,5\pi)$ ).

Por tanto:

- La magnitud es monótonamente decreciente comenzando el diagrama de Nyquist en  $G_o(j0)C(j0) = 2$ .
- El ángulo va de  $0$  a  $-5\pi/2$ , cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , en sentido horario.
- (Este punto no se esperaba fuese calculado por el estudiante) El cruce por la circunferencia de radio unitario (cruce por  $0[dB]$ ) se produce para

$$|G_o(j\omega_\phi)C(j\omega_\phi)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_\phi = \sqrt{48}$$

en que el ángulo es

$$\begin{aligned}\angle\{G_o(j\omega_\phi)C(j\omega_\phi)\} &= -\arctan(\omega_\phi/4) - 2\angle(16 - \omega_\phi^2 + j3\omega_\phi) \\ &= -\underbrace{\arctan(\sqrt{3})}_{>\pi/4} - 2\underbrace{\angle(-32 + j12\sqrt{3})}_{>\pi/2} \\ &< -\pi\end{aligned}$$

Es decir, el margen de fase es **negativo**.

**Problema 1.8 (10 pts.)** Para una planta estable en lazo abierto, se ha diseñado un controlador PID *ideal* sin filtro de la parte derivativa:

$$C_o(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_r s} + T_d s \right)$$

en que  $K_p = 1$ ,  $T_r = 2$ , y  $T_d = 0,5$ . Sin embargo, en el lazo real el controlador se implementa con la aproximación usual de la derivada:

$$C(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_r s} + \frac{T_d s}{\tau_d s + 1} \right)$$

en que  $\tau_d = T_d/10$ . Suponiendo que no existe error de modelado en la planta (es decir,  $G = G_o$ ), ¿bajo qué condiciones es posible asegurar que el lazo verdadero es estable?

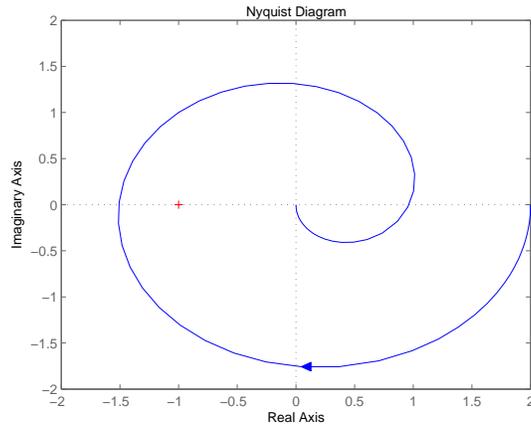


Figura 2: Diagrama de Nyquist para el Problema 1.7.

### Solución

El análisis del error de modelado en el controlador es simétrico con el de la planta. Es decir, la condición para estabilidad robusta será:

$$|T_o(j\omega)| |C_\Delta(j\omega)| < 1$$

en que

$$C_\Delta(s) = \frac{C(s) - C_o(s)}{C_o(s)} = \frac{-s^3}{(s + 20)(s + 1)^2}$$

La magnitud de  $C_\Delta(j\omega)$  es siempre menor o igual a 1, tal como muestra el diagrama de Bode de la figura.

Para asegurar estabilidad robusta es suficiente verificar que  $|T_o(j\omega)| < |C_\Delta(j\omega)|^{-1}$ , es decir, la magnitud se mantiene bajo la curva sólida en la figura.

---

MSB/JYE/24.10.06

