Control Automático I – 2do semestre 2006

Tercer Certamen y soluciones

Problema 1.1 (10 pts.) Para una planta estable, con modelo $G_o(s)$, se aplica el método de oscilación de Ziegler-Nichols para sintonizar un controlador PI. Se obtienen $K_p = 2$ y $T_r = 1{,}5$.

¿Cómo se ajustarían esos parámetros si el modelo de la planta fuese $0{,}5G_o(s)$?

Nota: Las fórmulas de ajuste de Z-N por oscilación son $K_p = 0{,}45K_c$ y $T_r = \dfrac{P_c}{1{,}2}$

Solución

Al aumentar la ganancia de $G_o(s)$, no cambia el valor de la frecuencia a la cual la curva $G_o(j\omega)$ cruza por el eje real negativa, por lo cual P_c permanece invariable. Sin embargo, cambia la ganancia crítica en un factor 2. Por lo tanto, T_r no se modifica, pero K_p aumenta al doble, es decir, $K_p = 4$.

Problema 1.2 (10 pts.) Una planta tiene una función de transferencia $G_o(s) = \dfrac{3}{s-2}$. Calcule los parámetros de un controlador PI de modo que los modos naturales del lazo decaigan al menos tan rápido como e^{-4t}.

Solución

El problema se puede resolver por asignación de polos. Dado que el controlador es un PI, entonces, $A_{cl}(s)$ resulta ser de grado 2. Para cumplir la especificación, elegimos, por ejemplo

$$A_{cl}(s) = s^2 + 10s + 36$$

Esto establece que los polos del lazo cerrado serán complejos conjugados, con parte real igual a -5. Entonces la ecuación Diofantina resulta

$$(s-2)s + 3(p_1 s + p_0) = s^2 + 10s + 36$$

de donde resultan $p_1 = 4$ y $p_0 = 12$. Con lo cual el controlador PI es

$$C(s) = 4\left(1 + \frac{3}{s}\right)$$

En otras palabras; $K_p = 4$ *y* $T_r = \dfrac{1}{3}$

Problema 1.3 (20 pts.) Se desea controlar una planta en lazo cerrado. Se sabe que el modelo nominal de la planta es

$$G_o(s) = \frac{8}{(s-2)(s+4)}$$

Se sabe además que:

1. La referencia es constante

2. La perturbación de entrada es una sinusoidal de frecuencia 5 $[\mathrm{rad/s}]$.

3. El ruido tiene energía significativa sólo en frecuencias superiores a 10 $[\mathrm{rad/s}]$.

4. El error de modelado multiplicativo satisface

$$|G_\Delta(j\omega)| \leq \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+64}}$$

Elija un polinomio de lazo cerrado $A_{cl}(s)$ y proponga una ecuación Diofantina para calcular el controlador. No se pide resolver la ecuación; pero debe especificar todos los polinomios involucrados, en forma explícita. Además debe justificar el impacto de $G_o(s)$ y de cada una de las especificaciones indicadas arriba, en su elección de $A_{cl}(s)$.

Solución

Veamos primero el asunto del grado. Sabemos que $\mathrm{grado}(A_{cl}(s))$ *debe ser al menos* $2n-1=3$*; sin embargo necesitamos integración (especificación 1), además debamos forzar en el controlador, polos en* $\pm j5$*, por la especificación 2. En resumen, debe cumplirse que* $\mathrm{grado}(A_{cl}(s)) \geq 2n-1+1+2=6$*.*

Para seleccionar las raíces de $A_{cl}(s)$*, vemos las limitaciones en el ancho de banda que imponen* $G_o(s)$ *y las otras especificaciones. El polo inestable de* $G_o(s)$ *sugiere que el ancho de banda debe ser mayor que 2 (de otra forma, se tendría un overshoot muy grande. La especificación 3 indica que ese ancho de banda debe ser menor que* 10 $[\mathrm{rad/s}]$*, y la especificación 4 pone un límite superior en* 8 $[\mathrm{rad/s}]$*. Elegiremos, en consecuencia, las raíces dominantes de* $A_{cl}(s)$ *en* -7*. Por ejemplo, elegiremos un factor cuadrático dominante* $s^2+14s+50$*. Las demás raíces serán elegidas a la izquierda de* -7*. Entonces*

$$(s-2)(s+4)s(s^2+25)\underbrace{(s+\bar{\ell}_o)}_{L(s)}+8\underbrace{(p_4s^4+p_3s^3+p_2s^2+p_1s+p_0)}_{P(s)}=A_{cl}(s)$$

donde

$$A_{cl}(s)=(s^2+14s+50)(s+8)(s+9)(s+10)(s+11)$$

Problema 1.4 (10 pts.) En un lazo de control internamente estable se sabe que $T_o(s)=\dfrac{4e^{-0{,}5s}}{s^2+3s+4}$. Calcule un bloque adecuado de prealimentación de la referencia, si se sabe que $r(t)$ es una señal con una componente constante y una componente variable, donde esta última tiene espectro con energía significativa sólo en el rango de 0 a 8 $[\mathrm{rad/s}]$.

Solución

Se debe lograr que el ancho de banda de $Y(s)/R(s)$ *sea al menos* 8 $[\mathrm{rad/s}]$*. Además debe preservarse la ganancia a continua igual a* 1*, para seguir la componente constante de la referencia. Otro aspecto a considerar es que no hay nada que se pueda hacer con el retardo, así es que hay que preocuparse sólo de la parte racional.*

Entonces, una selección posible de $H(s)$ *es*

$$H(s)=\frac{25(s^2+3s+4)}{s^2+15s+100} \Longrightarrow \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{100e^{-0{,}5s}}{s^2+15s+100}$$

Problema 1.5 (20 pts.) EL modelo nominal de una planta es

$$G_o(s) = \frac{s-8}{(s-2)(s+6)^2}$$

Suponga que se desea diseñar un lazo de control, usando un controlador con integración. Sin calcular controlador alguno, determine claramente **TODAS** las condiciones que debe satisfacer la sensibilidad nominal $S_o(s)$ si el controlador es propio e internamente estabilizante.

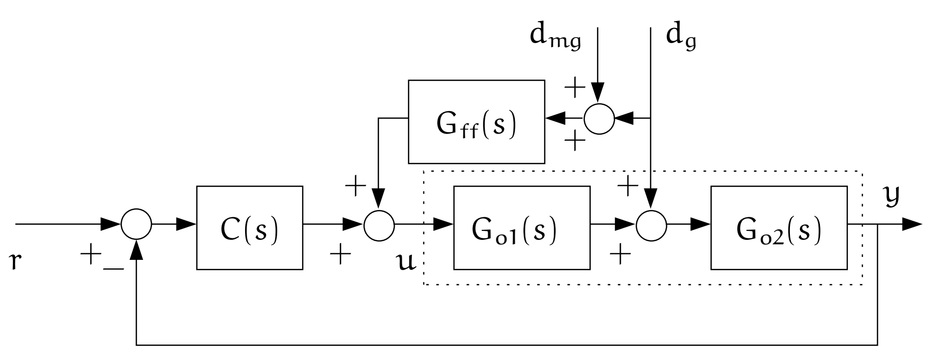
Solución

Las condiciones mínimas son:

1. $S_o(s)$ *debe ser bipropia, porque el producto* $G_o(s)C(s)$ *es estrictamente propio.*
2. $S_o(0) = 0$, *por la presencia del integrador*
3. $S_o(\infty) = 1$ *porque* $G_o(\infty)C(\infty) = 0$
4. $S_o(2) = 0$, *porque todos los polos no cancelados de la planta (y los inestables no pueden ser cancelados) son ceros de* $S_o(s)$.
5. $S_o(8) = 1$, *porque todos los ceros no cancelados de la planta (y los de fase no mínima no pueden ser cancelados) son ceros de* $T_o(s)$. *Además debe cumplirse que* $S_o(8) + T_o(8) = 1$.
6. *Si* $S_o(s)$ *es de orden* n_o, *entonces el grado del polinomio* $\mathrm{den}(S_o(s)) - \mathrm{num}(S_o(s))$ *es de grado* $\leq n_o - 2$. *Esto se debe a que el grado relativo de* $T_o(s)$ *debe ser al menos el grado relativo de la planta (en este caso, 2), entonces, dado que*

$$T_o(s) = 1 - S_o(s) = \frac{\mathrm{den}(S_o(s)) - \mathrm{num}(S_o(s))}{\mathrm{den}(S_o(s))}$$

se obtiene la respuesta indicada, ya que $\mathrm{grado}(T_o(s)) = \mathrm{grado}(\mathrm{den}(S_o(s))) - \mathrm{grado}(\mathrm{den}(S_o(s)) - \mathrm{num}(S_o(s)) \geq 2$



Problema 1.6 (10 pts.) En el lazo de control con prealimentación de perturbaciones de la figura determine el efecto del ruido de medición de la perturbación, $d_{mg}(t)$, sobre la salida de la planta, $y(t)$.

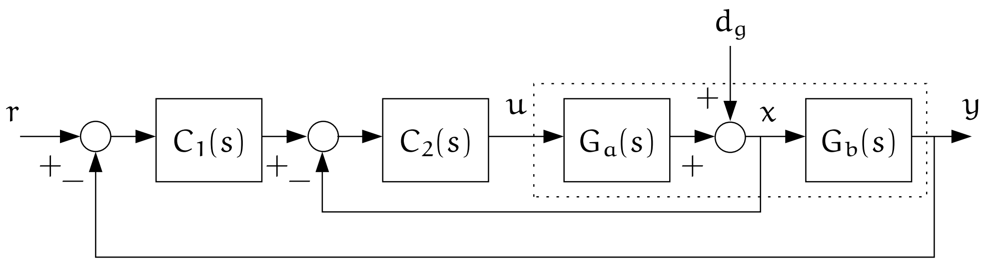
Solución

Observe que el ruido de medición de la perturbación $d_{mg}(t)$ *actúa como una perturbación de entrada filtrada por el bloque* $G_{ff}(s)$*. De esta forma, la transferencia entre el ruido de medición y la salida se obtiene directamente mediante álgebra de bloques:*

$$\frac{Y(s)}{D_{mg}(s)} = G_{ff}(s)\, S_{io}(s)$$

en que

$$S_{io}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{G_{o1}(s)G_{o2}(s)}{1 + G_{o1}(s)G_{o2}(s)C(s)}$$



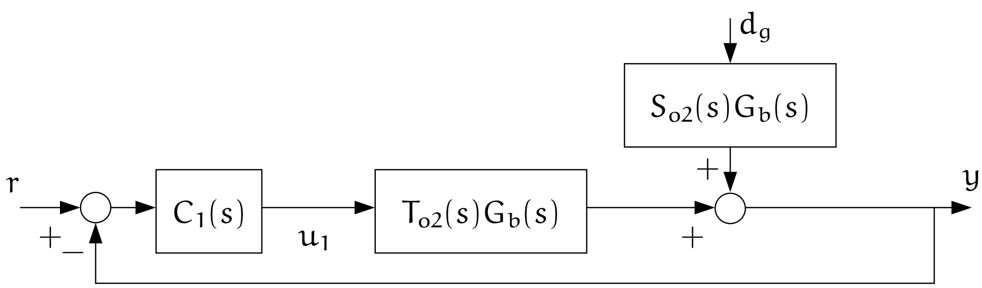
Problema 1.7 (10 pts.) En el lazo de control en cascada de la figura determine el efecto de la perturbación $d_g(t)$ sobre la señal de actuación $u(t)$.

Solución

Note que, si denominamos por $u_1(t)$ *la salida del controlador* $C_1(s)$*, tenemos que:*

$$U(s) = S_{uo2}(s)U_1(s) - S_{uo2}D_g(s)$$

Ahora bien, para determinar la relación entre el efecto de $d_g(t)$ *sobre* $u_1(t)$ *podemos* re-escribir *el lazo usando álgebra de bloques y las funciones de sensibilidad del lazo interior:*



De la figura se puede deducir que

$$U_1(s) = \frac{-S_{o2}(s)G_b(s)C_1(s)}{1 + G_b(s)T_{o2}(s)C_1(s)}\, D_g(s)$$

Finalmente

$$\begin{aligned} U(s) &= -S_{uo2}(s)\left(1 + \frac{S_{o2}(s)G_b(s)C_1(s)}{1 + G_b(s)T_{o2}(s)C_1(s)}\right) D_g(s) \\ &= \frac{-C_2(s)}{1 + G_a(s)C_2(s)}\left(\frac{1 + G_b(s)C_1(s)}{1 + G_b(s)T_{o2}(s)C_1(s)}\right) D_g(s) \\ &= \frac{-C_2(s)(1 + G_b(s)C_1(s))}{1 + G_a(s)C_2(s) + G_b(s)G_a(s)C_2(s)C_1(s)} D_g(s) \end{aligned}$$

MSB/JYE, 18.11.2006