Control Automático I

Solución Primer Certamen – 2do. Semestre 2007

Problema 1.1 (10 pts.) Considere un sistema de **control en lazo abierto** como en la Figura 1, donde $R(s)$ es la referencia y $D(s)$ es una perturbación. Se implementa un controlador lineal de la forma

$$U(s) = H_1(s)R(s) + H_2(s)D(s)$$

¿Cuál sería la elección ideal para $H_1(s)$ y $H_2(s)$

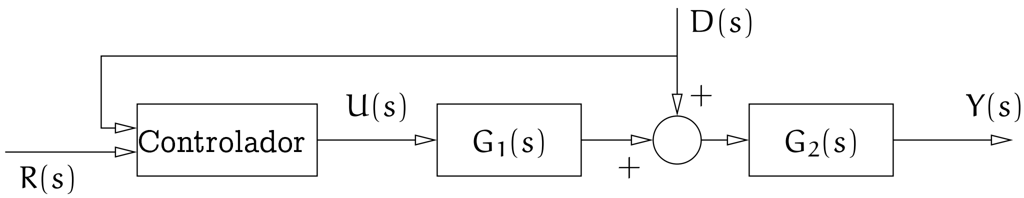

Figura 1: Control en lazo abierto.

Solución

En primer lugar tenemos que

$$Y(s) = G_2(s)D(s) + G_1(s)G_2(s)U(s)$$

Si reemplazamos la expresión para $U(s)$ obtenemos

$$Y(s) = G_2(s)D(s) + G_1(s)G_2(s)H_1(s)R(s) + G_1(s)G_2(s)H_2(s)D(s)$$

Idealmente $Y(s) = R(s)$, lo cual se lograría con

$$H_1(s) = \frac{1}{G_1(s)G_2(s)} \qquad \text{y} \quad H_2(s) = -\frac{1}{G_1(s)}$$

Problema 1.2 (10 pts.) Considere un sistema de **control en lazo abierto** en que el operador $y = f\langle\, u \,\rangle$ queda definido por la relación:

$$\frac{d\,y(t)}{dt} + \alpha\, y(t) = K\, u^2(t - \tau_d)$$

en que α, K, τ_d son constantes reales positivas. Determine/proponga $g\langle \cdot \rangle$ de manera que $y(t) = r(t)$, indicando claramente bajo qué condiciones esto es posible.

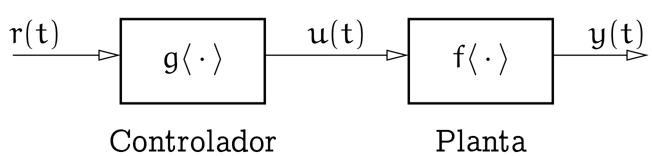

Figura 2: Esquema de control en lazo abierto.

Solución

La planta puede ser modelada como un sistema lineal con una nolinealidad en la entrada:

$$\frac{Y(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{K\, e^{-\tau_d s}}{s+\alpha}$$
$$\tilde{U}(s) = \mathcal{L}\{\tilde{u}(t)\}$$
$$\tilde{u}(t) = u^2(t)$$

Por tanto $g\langle \cdot \rangle$ puede obtenerse invirtiendo la parte racional de la función de transferencia (el retardo **no** puede invertirse), y agregando una no linealidad a la salida del controlador de lazo abierto:

$$\frac{Z(s)}{\tilde{R}(s)} = \frac{s+\alpha}{K(\beta s+1)} \qquad 0 < \beta << 1$$
$$Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}$$
$$u(t) = \sqrt{\text{máx}\{z(t), 0\}}$$

El término β debe agregarse para hacer el controlador **realizable**.

El esquema logra seguir exactamente sólo referencias **constantes y positivas**, debido a la presencia de las nolinealidades y el retardo.

Problema 1.3 (10 pts.) En un lazo de control internamente estable se sabe que

$$T_o(s) = \frac{9}{s^2+5s+9}$$

Suponiendo que $r(t) = 2$ y que $d_o(t) = 5\cos(3t)$, ¿cuánto sería $y(t)$ en estado estacionario?

Solución

Se puede aplicar superposición, recordando que $Y(s) = T_o(s)R(s) + S_o(s)D_o(s)$. La componente constante de la respuesta es

$$y_r(t) = T(0) \cdot 2 = 2$$

Por su parte, el efecto de la perturbación puede calcularse aplicando fasores. Para lo cual calculamos $S_o(j3)$, la que está dada por

$$S_o(j3) = 1 - T_o(j3) = 1 - j0,6 = \sqrt{1,36}\angle \arctan(-0,6)$$

Con esto, se obtiene

$$y_d(t) = 5\sqrt{1,36}\cos(3t - \arctan(0,6))$$

Problema 1.4 (10 pts.) Considere un lazo de control en que la planta tiene modelo nominal

$$G_o(s) = \frac{(s^2+10)}{(s+2)^2(-s+2{,}5)}$$

Determine todas las condiciones sobre la sensibilidad nominal de entrada, $S_{io}(s)$, que aseguren un lazo internamente estable, un controlador propio y compensación perfecta en estado estacionario de perturbaciones constantes.

Solución

La sensibilidad nominal de entrada está dada por la transferencia

$$S_{io}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{B_o(s)L(s)}{A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)}$$

1. La función de transferencia $S_{io}(s)$ debe ser estable.
2. Para que el lazo sea internamente estable el controlador **no** debe cancelar polos ni ceros inestables de la planta, por tanto, $S_{io}(\pm j\sqrt{10}) = 0$
3. Un controlador propio hace que el grado de $A_{cl} = A_oL + B_oP$ sea igual al grado de A_oL, por tanto, el grado relativo de $S_{io}(s)$ es **igual** al grado relativo de $G_o(s)$.
4. Para compensar perfectamente perturbaciones constantes el controlador debe tener un polo en $s = 0$, y por tanto, $S_{io}(0) = 0$.

Problema 1.5 (10 pts.) Considere un lazo de control en que la planta y controlador están definidos, respectivamente, por las transferencias

$$G_o(s) = \frac{-s+1}{s^2 + 2\xi s + 1} \qquad C(s) = \frac{K_p(s+1)}{s}$$

El factor de amortiguación de la planta no se ha podido determinar exactamente, pero se encuentra en el intervalo $[\xi_1, \xi_2]$, en que

$$0 < \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 < 1$$

Determine, si existe, el rango de valores de K_p que aseguran estabilidad interna del lazo de control en función de ξ_1 y ξ_2

Solución

El polinomio característico de lazo cerrado está dado por:

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= (s^2 + 2\xi s + 1)s + K_p(-s+1)(s+1) \\ &= s^3 + (2\xi - K_p)s^2 + s + K_p \end{aligned}$$

El arreglo de Routh es entonces

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2\xi - K_p & K_p \\ s & \frac{2\xi - 2K_p}{2\xi - K_p} & 0 \\ 1 & K_p & \end{array}$$

Por tanto, de la primera columna se obtienen las condiciones

$$\begin{aligned} & 2\xi - K_p > 0 && \Rightarrow && K_p < 2\xi \\ & \tfrac{2\xi - 2K_p}{2\xi - K_p} > 0 && \Rightarrow && K_p < \xi \\ & K_p > 0 \end{aligned}$$

Por tanto el lazo es internamente estable, si y sólo si

$$0 < K_p < \xi_1$$

Problema 1.6 (15 pts.) Suponga que una planta tiene modelo nominal $G_o(s)$ y modelo de calibración $G(s)$, donde

$$G_o(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad ; G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(-xs+1)}$$

donde $x \in \mathbb{R}^+$.

1.6.1 Si el controlador es $C(s) = K/s$, elija un valor de K que estabilice el lazo nominal, es decir, aquel lazo en el que $C(s)$ controla a $G_o(s)$

1.6.2 Usando el valor elegido para K, analice si el controlador resultante estabiliza o no al modelo de calibración, para algún valor de x, real y positivo.

1.6.3 Supongamos que $x = 0,1$ y que se elige, para controlar el modelo de calibración $G(s)$, el controlador $C(s) = 2\frac{-0,1s+1}{s}$. ¿Le parece una elección adecuada? Justifique su respuesta.

Solución

1.6.1 Con este controlador el polinomio del lazo cerrado sería

$$A_{cl}(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

Entonces, podemos usar Routh

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s^3} & 1 & 2 \\ \mathbf{s^2} & 3 & K \\ \mathbf{s^1} & \frac{6-K}{3} & \\ \mathbf{s^0} & K & \end{array}$$

Por lo cual basta elegir cualquier valor de K mayor que 0 y menor que 6. Por ejemplo, elegimos $K = 2$

1.6.2 Si $C(s) = 2/s$ se conecta para controlar $G(s)$, el polinomio de lazo cerrado sería

$$A_{cl}(s) = (s^3 + 3s^2 + 2s)(-xs + 1) + 2$$

de donde se observa que, para $x > 0$, $A_{cl}(s)$ tendría algunos coeficientes positivos y otros negativos. Por lo tanto, no se puede estabilizar el modelo de calibración con el mismo controlador.

1.6.3 NO es adecuado porque genera una cancelación inestable.

MSB/JYE/061007