Control Automático I
Segundo Certamen – 2° Semestre, 2007

Problema 2.1 (10 pts.) En un lazo de control realimentado, sin cancelaciones, se tiene que

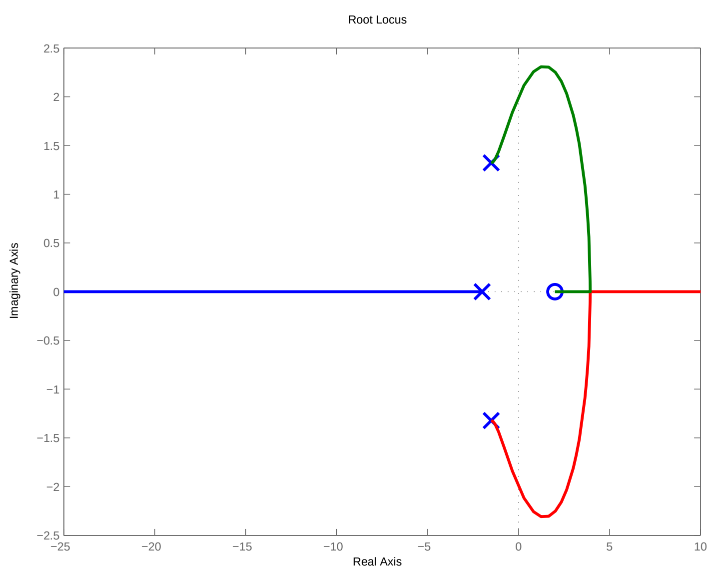
$$G_o(s)C(s) = K\frac{(s-2)}{(s+2)(s^2+3s+4)}$$

2.1.1 Dibuje el LGR para $K \in \mathbb{R}^-$ (debe ser cualitativamente correcto).

2.1.2 Calcule el punto por donde las ramas del LGR cruzan el eje imaginario.

Solución

2.1.1 Para la construcción del LGR con $K \leq 0$ se usan las reglas con los cambios señalados en clases´, relativos a: segmentos del eje real que pertenecen al LGR y ángulo de asíntotas. Se obtiene



2.1.2 El polinomio característico del lazo cerrado es

$$A_{cl}(s) = s^3 + 5s^2 + (10+K)s + 8 - 2K$$

El cruce por el eje imaginario se puede calcular, por ejemplo, usando Routh

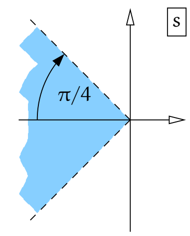
$$\begin{array}{lcc}
\mathbf{s^3} & 1 & 10+K \\
\mathbf{s^2} & 5 & 8-2K \\
\mathbf{s^1} & 8{,}4+1{,}4K & \\
\mathbf{s^0} & 8-2K &
\end{array}$$

de donde resulta que el punto crítico, para $K < 0$, se alcanza con $K = -6$. De aquí, usando la fila asociada a s^2 en el arreglo de Nyquist, s^2+4, se llega a que las ramas del LGR, para $K < 0$, cruzan el eje imaginario en $\pm j2$.

Problema 2.2 (10 pts.) Considere un lazo de control en que

$$G_o(s) = \frac{1}{s+2} \qquad C(s) = \frac{K_I}{s}$$

Determine, si existe, el rango de valores de $K_I \in \mathbb{R}$ tal que los todos los polos de lazo cerrado se ubiquen en la región indicada en la figura.



Solución

El análisis se puede realizar construyendo el LGR para el polinomio de lazo cerrado:

$$A_{cl}(s) = s(s+2) + K_I$$

En la Figura 1 se muestra el LGR correspondiente a $K_I \in [0, \infty[$ (Note que, para $K_I < 0$ siempre habrá un polo de lazo cerrado en el semiplano derecho).

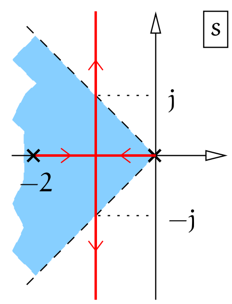


Figura 1:

El valor crítico de la ganancia K_I es aquel en que los polos de lazo cerrado se ubican en $s = -1 \pm j$. Este valor puede obtenerse, por ejemplo, calculando directamente las raíces de $A_{cl}(s)$:

$$A_{cl}(s) = s^2 + 2s + K_I = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -1 \pm \sqrt{1 - K_I}$$

Donde apreciamos que, para polos de lazo cerrado complejos conjugados, la parte imaginaria de ellos alcanza la frontera de la región indicada cuando

$$\sqrt{K_I - 1} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad K_I = 2$$

Por tanto, el rango de valores es $0 < K_I < 2$

Problema 2.3 (10 pts.) En un lazo de control, sin cancelaciones inestables, la respuesta en frecuencia del lazo abierto $G_o(j\omega)C(j\omega)$ tiene los diagramas de Bode que se muestran en la Figura 2.

2.3.1 Si $G_o(s)C(s)$ no tiene polos en el SPD abierto, ¿es el lazo inestable ? Justifique su respuesta en forma breve pero precisa.

2.3.2 Calcule el factor de ganancia que permite alcanzar un margen de ganancia de 6 [dB].

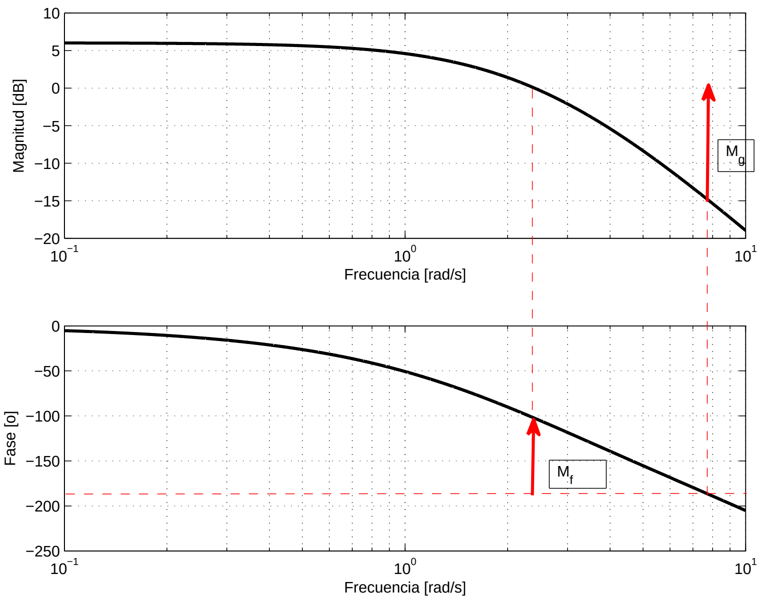


Figura 2: Diagramas de Bode del lazo abierto (Problema 2.3)

Solución

2.3.1 Bastaría con notara que ambos márgenes de estabilidad son positivos. Ello, sumado al hecho que $G_o(s)C(s)$ no tiene polos en el SPD abierto, permite concluir que el lazo cerrado es estable.

La misma conclusión se puede obtener como resultado del siguiente análisis: el ángulo de $G_o(j\omega)C(j\omega)$ es monotónico y $G_o(j\omega)C(j\omega)$ sólo cruza una vez el eje real negativo ($-\pi$ [rad]). Esto ocurre cuando $|G_o(j\omega)C(j\omega)|$ es menor que uno. Por lo tanto, $G_o(j\omega)C(j\omega)$ NO ENCIERRA el punto $(-1;0)$. Combinando este resultado con el hecho que $G_o(s)C(s)$ no tiene polos en el SPD abierto, es decir, $P = 0$, se concluye que el lazo cerrado es estable.

2.3.2 De los diagramas de Bode vemos que el margen de ganancia es aproximadamente 15 [dB]. Entonces, para ajustar M_g a 6 [dB], hay que agregar 9 [dB]. En magnitud, ello significa una ganancia

$$K = 10^{9/20}$$

Problema 2.4 (10 pts.) Considere un lazo nominal de control en que

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1} \quad ; \quad C(s) = K_p$$

Si $K_p = 2$ y $G(s) = e^{-s\tau}G_o(s)$, determine, si existe, el valor del máximo retardo admisible antes que el lazo *verdadero* sea inestable.

Solución

El margen de fase del lazo nominal puede obtenerse directamente del diagrama de Nyquist de $G_o(s)C(s)$

O bien, puede calcularse analíticamente:

$$|G_o(j\omega)C(j\omega)| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{\omega^2+1}} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \omega = \omega_c = \sqrt{3}$$

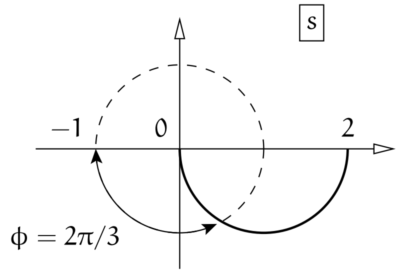


Figura 3:

Entonces

$$\angle G_o(j\omega_c)C(j\omega_c) = \angle G_o(j\sqrt{3})C(j\sqrt{3}) = -\arctan\sqrt{3} = -\pi/3$$

Por tanto, el margen de fase es $M_\phi = \phi = 2\pi/3$

El máximo retardo admisible está dado por

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_c)C(j\omega_c) &= -\pi \\ -\omega_c\tau + \angle G_o(j\omega_c)C(j\omega_c) &= -\pi \\ -\sqrt{3}\tau + \angle G_o(j\sqrt{3})C(j\sqrt{3}) &= -\pi \\ -\sqrt{3}\tau - \pi/3 &= -\pi \end{aligned}$$

Por tanto, es igual a $\tau = \tau_c = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ segundos.

Problema 2.5 (10 pts.) El error multiplicativo del modelo nominal de una planta cumple con

$$|G_\Delta(j\omega)| \leq \frac{3\omega}{\sqrt{400+\omega^2}}$$

2.5.1 Estime, en forma aproximada, el máximo ancho de banda de T_o que asegura estabilidad robusta.

2.5.2 Estime, en forma aproximada, el máximo ancho de banda de T_o que asegura que se cumple

$$|T_o(j\omega)G_\Delta(j\omega)| \leq 0{,}4 \qquad \forall\omega \geq 0$$

Solución

2.5.1 La condición de suficiencia es

$$|T_o(j\omega)G_\Delta(j\omega)|$$

¡1. El límite de la banda del lazo cerrado, es cuando $|T_o(j\omega)|$ debe bajar claramente de valor, por lo que el diseño nominal es robustamente estable si $|G_\Delta(j\omega)| < 1$, lo que a su vez, se logra si el límite superior para $|G_\Delta(j\omega)|$1 es también menor que 1. Em otras palabras, cuando

$$\frac{3\omega}{\sqrt{400+\omega^2}} < 1$$

lo que se logra cuando $\omega < \sqrt{50}$ [rad/s].

2.5.2 La condición dada equivale a

$$|2{,}5T_o(j\omega)G_\Delta(j\omega)| \leq 1 \qquad \forall\omega \geq 0$$

En consecuencia se requiere que

$$\frac{12\omega}{\sqrt{400+\omega^2}} < 10$$

lo cual se cumple para $\omega \leq \dfrac{4}{\sqrt{2{,}21}}$ [rad/s].

Problema 2.6 (10 pts.) El diagrama polar de la Figura 4 corresponde a la respuesta en frecuencia de la función de lazo abierto $G_o(s)C(s)$.

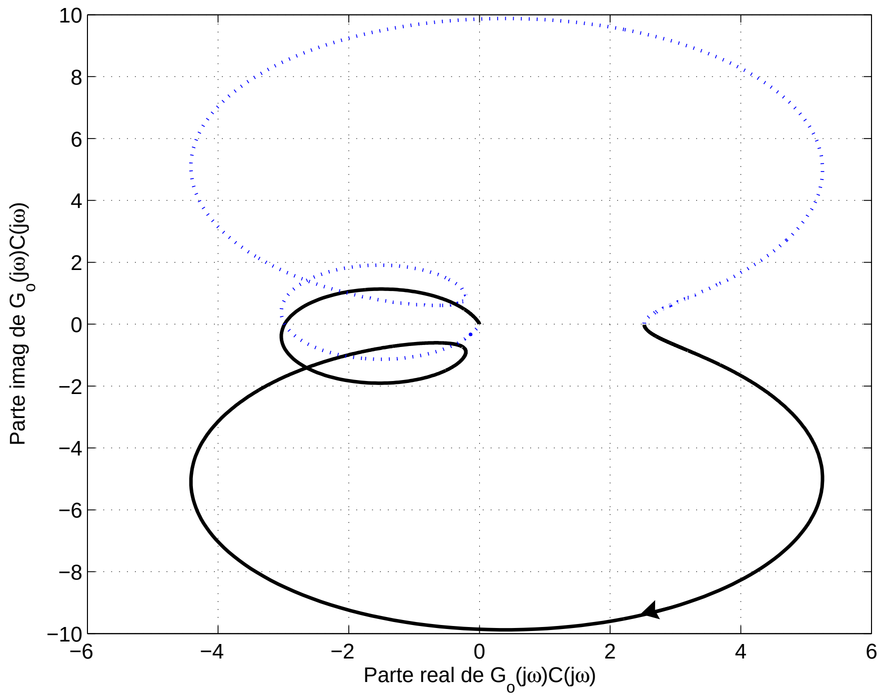


Figura 4: Diagrama polar del lazo abierto (Problema 2.6)

Se supone que no hay cancelaciones inestables y que todos los polos de $G_o(s)C(s)$ **tienen parte real negativa.**

2.6.1 ¿Es el lazo cerrado estable?

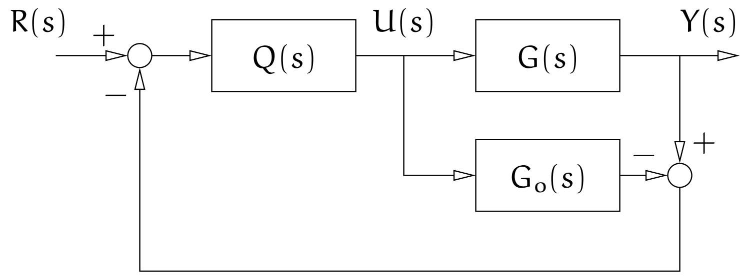
2.6.2 Estime, a partir del gráfico, la ganancia que haría que los polos dominantes del lazo cerrado estuviesen en el eje imaginario.

Solución

2.6.1 El diagrama dado encierra el punto $(-1;0)$, dos veces en sentido de reloj. Dado que $P = 0$, se concluye que el lazo cerrado tiene $Z = 2$, es decir, es inestable.

2.6.2 La condición pedida es equivalente a que el diagrama de Nyquist pase justo por encima del punto $(-1;0)$, ello se obtiene cuando la ganancia es multiplicada aproximadamente por $1/3$.

Problema 2.7 (10 pts.) Considere el sistema de control en la figura. Las funciones de transferencia $G(s)$ y $G_o(s)$ son distintas y conocidas, con $G_o(0) \neq 0$ y $G(0) \neq 0$.



Suponiendo que el lazo es internamente estable, determine qué condición(es) debe satisfacer $Q(s)$ para que $y_{ee}(t) = r(t)$ en estado estacionario para referencias constantes.

Solución

Se debe considerar el diagrama de bloques en que las transferencias son reemplazadas por su ganancia a continua:

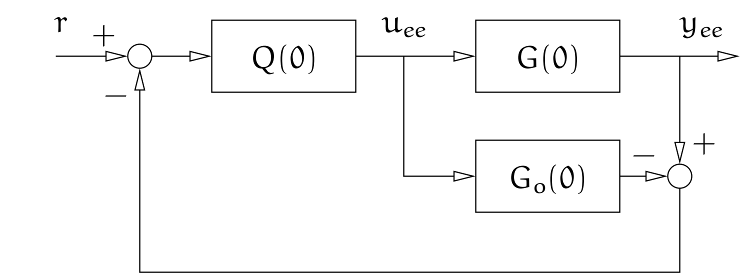


Figura 5:

Tenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{ee} &= G(0)u_{ee} \\ u_{ee} &= Q(0)[r - (y_{ee} - G_o(0)u_{ee})] \end{aligned}$$

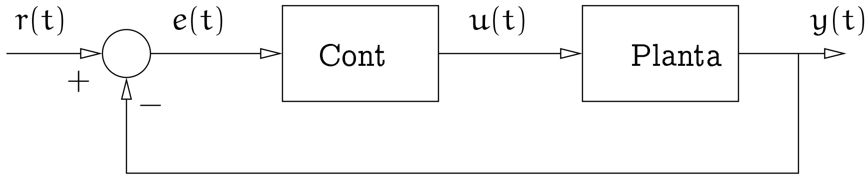
Despejando, se obtiene

$$\frac{y_{ee}}{r} = \frac{G(0)Q(0)}{1 - G_o(0)Q(0) + G(0)Q(0)}$$

Por tanto,

$$y_{ee} = r \quad \Longleftrightarrow \quad G_o(0)Q(0) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad Q(0) = [G_o(0)]^{-1}$$

Problema 2.8 (10 pts.) Considere el lazo de control representado en el diagrama de la figura.



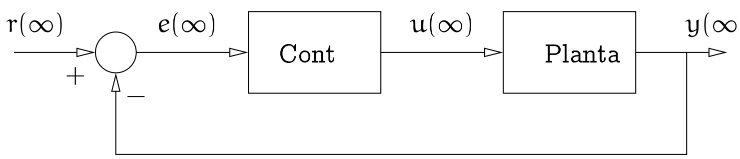
Se sabe que el controlador es lineal con función de transferencia $C(s)$, dada por $C(s) = K(s+2)/s$. Se sabe además que la planta es no lineal con modelo de entrada-salida

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (4 + 0{,}1y(t)^2)\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 0{,}5u(t)$$

Suponga que K se elige de modo que el lazo es internamente estable. Calcule los valores estacionarios $e(\infty)$,$u(\infty)$ e $y(\infty)$, para la referencia $r(t) = -2 + 3e^{-5t}$.

Solución

Considere la figura



En ella $r(\infty) = -2$. Como el controlador tiene ganancia infinita, a frecuencia cero, entonces por estabilidad interna, $e(\infty) = 0$, lo cual lleva a $y(\infty) = -2$. Por otro lado, la ganancia a continua de la planta no lineal, se calcula haciendo cero las derivadas en el modelo; lo cual lleva a que $u(\infty) = 8y(\infty) = -16$.