CONTROL AUTOMÁTICO I

Tercer certamen y soluciones

Problema 3.1 (10 pts.). Se desea usar el compensador (predictor) de Smith para controlar la planta

$$G_o(s) = \frac{e^{-2s}}{s + 0{,}5}$$

de modo que los polos dominantes estén ubicados en $-1 \pm j$. Se sabe además que la referencia es constante, para la cual el error estacionario debe ser cero.

Construya una función de transferencia $T_o(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)}$ que de origen a un controlador realizable y satisfaga las condiciones dadas.

Solución

En el esquema de Smith, la función de sensibilidad complementaria $T_o(s)$ *está dada por*

$$T_o(s) = \frac{\overline{G}_o(s)C(s)}{1 + \overline{G}_o(s)C(s)}\, e^{-\tau s}$$

donde $\overline{G}_o(s)$ *es el factor racional del modelo de la planta. Por su parte,* $C(s)$ *se diseña, en base a* $\overline{G}_o(s)$*, para lograr los polos deseados en el lazo cerrado. Así, al forzar integración, podemos construir la ecuación Diofantina, para la cual notamos que el grado mínimo de* $A_{cl}(s)$ *es 2, lo cual lleva a*

$$(s + 0{,}5)s + 1 \cdot (p_1 s + p_0) = (s + 1)^2 + 1 = s^2 + 2s + 2$$

de donde resultan $p_0 = 2$ *y* $p_1 = 1{,}5$

Entonces, recordando que $T_o(s) = \dfrac{B_o(s)P(s)}{A_{cl}(s)}\, e^{-\tau s}$*, se llega a*

$$\boxed{T_o(s) = \frac{1{,}5s + 2}{s^2 + 2s + 2} e^{-2s}}$$

Problema 3.2 (10 pts.). Suponga que se ha diseñado un controlador PID, obteniéndose

$$C(s) = 5 + \frac{2}{s} + \frac{s}{0{,}2s + 1}$$

Calcule todos los bloques de la implementación anti-enrollamiento de este controlador, para hacer frente al problema de saturación.

Solución

El mecanismo de anti-enrollamiento se implementa en un esquema con realimentación negativa en que hay dos bloques lineales y uno no-lineal. Este último es el que describe la característica de saturación. Los bloques lineales se calculan a partir de $C(s)$. El primero de ellos, es un bloque de ganancia $c_\infty = C(\infty)$ y el segundo es un bloque dinámico de función de transferencia $C(s)^{-1} - c_\infty$, donde

$$c_\infty = 10$$

$$C(s)^{-1} - c_\infty^{-1} = \frac{s(s + 5)}{10s^2 + 27s + 10} - \frac{1}{10} = \frac{0{,}23s - 0{,}1}{s^2 + 2{,}7s + 1}$$

Problema 3.3 (20 pts.). Suponga que el modelo nominal de una planta es

$$G_o(s) = \frac{-s+5}{(s+2)(s+3)}$$

Se sabe además que

1. La referencia es $r(t) = 2t$
2. La perturbación de salida es $d_o(t) = 1 + \cos(1{,}5t)$
3. El ruido es significativo sólo a frecuencias mayores que 10 $[rad/s]$.

Proponga un $A_{cl}(s)$ adecuado y formule, **sin resolver**, la ecuación Diofantina asociada. Debe indicar explícitamente los coeficientes de todos los polinomios involucrados y justificar la elección del polinomio $A_{cl}(s)$ (grado y ubicación de las raíces).

Solución

Para conseguir error estacionario cero en el seguimiento de la referencia se requiere que el controlador tenga DOS integradores (o sea, un polo doble en el origen). Para igual comportamiento en la compensación de perturbaciones se requiere que el controlador tenga un polo en el origen (ya incluido, para seguimiento) y polos en $\pm j1{,}5$. Así, $A_{cl}(s)$ debe ser de grado mayor o igual que $2 \cdot 2 - 1 + 2 + 2 = 7$.

La ubicación de los polos dominantes del lazo cerrado (raíces dominantes de $A_{cl}(s)$) están restringidos por los factores que se indican:

1. Ruido: el B_w de T_o debe ser menor que 10
2. Cero en SPD: el B_w debe ser menor que 5, para evitar un gran *undershoot*.
3. Perturbación y referencia: el B_w debe ser tan grande como sea posible, para lograr pronto el estado estacionario, una vez producido cambios en $r(t)$ y en $d_o(t)$.

Dado que no hay especificación de perturbaciones de entrada, podemos cancelar los dos polos de la planta. Resumiendo, podemos elegir

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 6s + 16)(s+2)(s+3)(s+5)(s+8)(s+10)$$

Donde los polos dominantes del lazo son las raíces del factor cuadrático $s^2+6s+16$, las que corresponden a un par conjugado con $\omega_n = 4$ y $\zeta = 0{,}75$. Los polos rápidos (en comparación con los polos dominantes de $T_o(s)$) en -5, -8 y -10 han sido elegidos para completar el grado de $A_{cl}(s)$.

Así la ecuación Diofantina queda:

$$(s+2)(s+3)s^2(s^2+1{,}25)(s+\bar{\ell}_0) + (-s+5)(s+3)(s+2)(\bar{p}_3 s^3 + \bar{p}_2 s^2 + \bar{p}_1 s + \bar{p}_0) = A_{cl}(s)$$

y, tras simplificación, queda en

$$\boxed{s^2(s^2+1{,}25)(s+\bar{\ell}_0) + (-s+5)(\bar{p}_3 s^3 + \bar{p}_2 s^2 + \bar{p}_1 s + \bar{p}_0) = (s^2+6s+16)(s+5)(s+8)(s+10)}$$

Problema 3.4 (10 pts.). Suponga que se desea controlar, con un PI, una planta con modelo nominal

$$G_o(s) = \frac{1}{(s+1)^4}$$

¿Qué valores se obtendrían para los parámetros del controlador, si se usa el método de oscilación?
Nota: Las fórmulas de ajuste de Z-N por oscilación son $K_p = 0{,}45K_c$ y $T_r = P_c/1{,}2$

Solución

Debemos primer calcular el punto en que el diagrama polar o de Nyquist cruza el eje real negativo. Esto ocurre cuando la fase de $G_o(j\omega)$ es $-\pi$ $[rad]$. Entonces

$$-4\arctan(\omega_c) = -\pi \Longleftrightarrow \omega_c = 1 \Longleftrightarrow P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = 2\pi$$

A la frecuencia ω_c se cumple que

$$G_o(j\omega_c) = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto la ganancia crítica cumple con $K_c = 4$. Aplicando la expresiones de Z-N, se llega a

$$\boxed{K_p = 0{,}45K_c = 1{,}8; \quad T_r = P_c/1{,}2 = \frac{5\pi}{3}}$$

Problema 3.5 (10 pts.). Suponga que el modelo nominal de una planta está dado por

$$G_o(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+2)}$$

Si se diseña un controlador estabilizante, **con integración y grado relativo uno**, diga todo lo que sea posible sobre la función de sensibilidad $S_{uo}(s)$, sin calcular controlador alguno. (Note que el controlador NO es bipropio)

Solución

La función de sensibilidad $S_{uo}(s)$ es igual a $T_o(s)/G_o(s)$ y debe cumplir lo siguiente:

- Debe ser estable, ya que $C(s)$ es estabilizante.
- Su grado relativo es igual a $gr(T_o) - gr(G_o) = 2 - 1 = 1$, ya que $gr(T_o) = gr(G_o) + gr(C)$
- $S_{uo}(0) = T_o(0)/G_o(0) = 4$, ya que $T_o(0) = 1$.
- $|S_{uo}(1)| = C(1) < \infty$, ya que por estabilidad, $T_o(1)$ también es cero.
- $|S_{uo}(2)| = 0$ ya que $G_o(2) = \infty$; pero por razones de estabilidad interna, $0 < |T_o(2)| < \infty$.

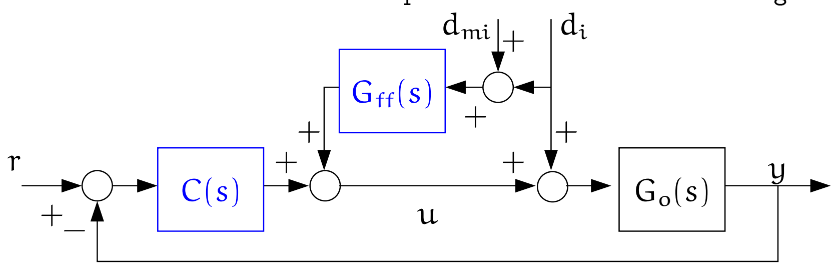
Problema 3.6 (20 pts.). Se desea diseñar un sistema de control para una planta $G_o(s) = \frac{1}{s+1}$ considerando que:

1. La referencia a seguir es de tipo escalón
2. La salida de la planta se mide con ruido significativo para $\omega > 3$[rad/s]
3. Existe una perturbación de entrada **medible** y con energía en torno a 5[rad/s]
4. La medición de la perturbación de entrada tiene ruido, el cual es significativo sólo para $\omega > 10$[rad/s]

Determine un controlador $C(s)$ y un bloque de prealimentación de la perturbación $G_{ff}(s)$ que permita satisfacer los requisitos de diseño, indicando claramente los compromisos involucrados.

Solución

El esquema de control con realmentación de la perturbación se muestra en la figura:



Los requisitos de diseño se traducen en:

1. Para que la planta siga referencias constantes, el controlador $C(s)$ debe tener integración, es decir, polo en el origen.
2. El ancho de banda del lazo cerrado debe ser **menor** que 3[rad/s]
3. El ancho de banda del lazo cerrado debe ser **mayor** que 5[rad/s]
4. El bloque de prealimentación debe tener un ancho de banda **menor** que 10[rad/s]

Claramente, 2 y 3 no son compatibles, por tanto el lazo cerrado se diseña con ancho de banda **menor** que 3[rad/s] y la perturbación será compensada por el bloque de prealimentación. La planta es de orden $n = 1$ por tanto basta un controlador bipropio con integración ($r = 1$ restricción) de orden $n_c = (n-1)+r = 1$, es decir, un PI:

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

El polinomio de lazo cerrado es de orden $n_{cl} = (2n-1) + r = 2$, y una posible elección está dada en la siguiente ecuación diofantina:

$$A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = A_{cl}(s)$$
$$(s+2)s + 2(p_1 s + p_0) = s^2 + (2+2p_1)s + p_0 = s^2 + 3s + 4$$

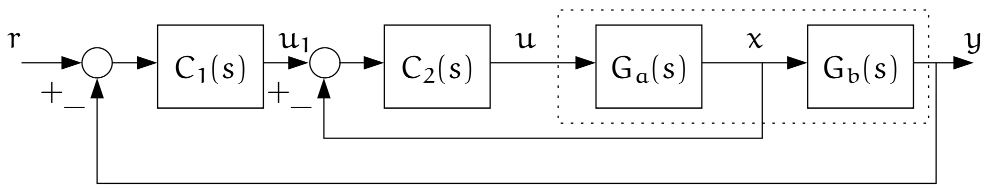
Donde se obtiene $p_0 = 4$, $p_1 = 0{,}5$ y, por tanto

$$C(s) = \frac{0{,}5s + 4}{s}$$

El bloque de prealimentación debe invertir el efecto de la perturbación de entrada, pero atenuar el ruido de su medición. Es decir, idealmente $G_{ff}(s) = -1$, sin embargo, $G_{ff}(s)$ debe tener ancho de banda mayor que 5[rad/s], pero **menor** que 10[rad/s]. Un posible elección está dada por

$$G_{ff}(s) = \frac{-(s+80)}{10(s+8)}$$

Problema 3.7 (10 pts.). Considere el esquema de control en cascada de la figura. Determine la sensibilidad de control $S_{uo}(s)$ que relaciona la referencia $R(s)$ con la actuación $U(s)$, en función de $C_1(s)$, $C_2(s)$, $G_a(s)$ y $G_b(s)$.



Solución

La sensibilidad de control $S_{uo}(s)$ puede obtenerse primero obteniendo la transferencia entre $R(s)$ y $U_1(s)$:

$$\frac{U_1(s)}{R(s)} = S_{uo1}(s) = \frac{C_1(s)}{1 + C_1(s)T_{o2}(s)G_b(s)}$$

en que

$$T_{o2}(s) = \frac{C_2(s)G_a(s)}{1 + C_2(s)G_a(s)}$$

Luego, se puede calcular la transferencia entre $U_1(s)$ y $U(s)$

$$\frac{U(s)}{U_1(s)} = S_{uo2}(s) = \frac{C_2(s)}{1 + C_2(s)G_a(s)}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
S_{uo}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} &= \frac{U_1(s)}{R(s)}\,\frac{U(s)}{U_1(s)} \\
&= \frac{C_1(s)}{1 + C_1(s)\frac{C_2(s)G_a(s)}{1+C_2(s)G_a(s)}G_b(s)}\,\frac{C_2(s)}{1 + C_2(s)G_a(s)} \\
&= \frac{C_1(s)C_2(s)}{1 + C_2(s)G_a(s) + C_1(s)C_2(s)G_a(s)G_b(s)}
\end{aligned}$$