Control Automático I – ELO-270 – S2, 2009
Primer Certamen y soluciones

Responder sólo **8 preguntas**. Puede utilizar sólo papel y lápiz. Tiempo: 100 minutos.

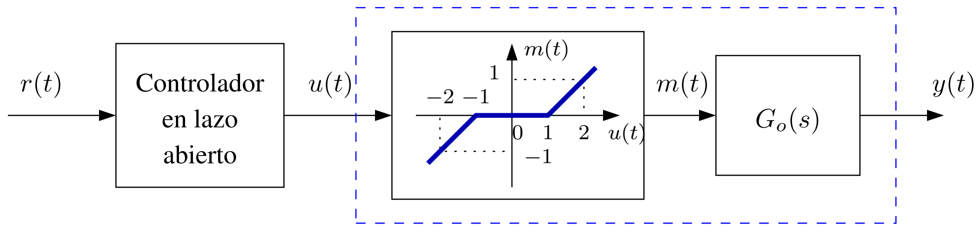
Problema 1.1 (10 puntos) *Imagine una persona manejando su automóvil desde Valparaíso a Santiago en que la velocidad máxima es 120 km/h y desea llegar en el menor tiempo posible. Identifique en esta situación los elementos de un sistema de control (planta, controlador, señales involucradas, etc...)*

Solución

Algunos elementos que se pueden identificar de la situación descrita en términos de un sistema de control son:

- La **planta** es el vehículo que reacciona a la presión del acelerador, del freno, las subidas y bajadas en la ruta, etc.
- El **controlador** es claramente el conductor que determina acelerar o frenar en base a la velocidad medida y condiciones del camino.
- Dado el objetivo de control (*velocidad máxima es 120 km/h + llegar en el menor tiempo posible*) la **referencia deseada** es una velocidad constante de 120 km/h.
- La **señal de actuación** está compuesta por la presión en el acelerador (y el freno)
- La **salida de la planta** que nos interesa y es **medible** es la velocidad del vehículo
- Otras **salidas** que no se mide (y en este caso no interesa para control) pueden ser los gases de combustión, el rendimiento del motor, el torque sobre las ruedas, etc...
- **Perturbaciones** hay de muchos tipos: subidas y bajadas en el camino, viento, lluvia, neblina, tipo de pavimento, presencia de otros vehículos, de carabineros, etc...
- Algunas de las perturbaciones son **medidas** o más bien percibidas por el controlador que ajusta la actuación: acelerar más cuando comienza una subida, desacelerar en las bajadas, etc...

Problema 1.2 (10 puntos) *En el esquema de control en lazo abierto representado en la figura, $G_o(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$, en que $a > 0$. Diseñe un controlador en lazo abierto que permita tener $y(t) = r(t)$, en estado estacionario para referencias constantes.*



Planta

Solución

En el esquema de control en lazo abierto el controlador debe invertir el modelo de la planta. La no-linealidad, conocida como *zona muerta*, es de la forma:

$$m(t) = f\langle u(t)\rangle \begin{cases} u(t) - 1 & ; u(t) > 1 \\ 0 & ; -1 < u(t) < 1 \\ u(t) + 1 & ; u(t) < -1 \end{cases}$$

Esta se puede invertir perfectamente con la siguiente función, conocida como *eliminador de zona muerta*:

$$u(t) = f^{-1}\langle u_1(t)\rangle = \begin{cases} u_1(t) + 1 & ; u(t) > 0 \\ u_1(t) - 1 & ; u(t) < 0 \end{cases}$$

De esta forma $m(t) = f\langle u(t)\rangle = f\langle f^{-1}\langle u_1(t)\rangle\rangle = u_1(t)$

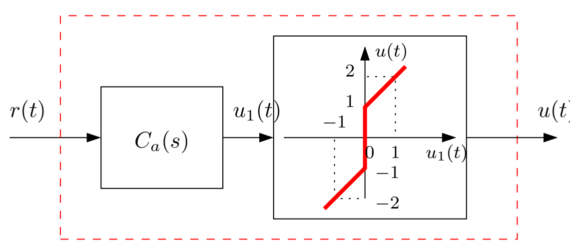
La parte lineal de la planta se puede invertir sólo aproximadamente, pues el controlador debe ser realizable. Es decir, debe tener grado relativo mayor o igual que cero. No hay problema con invertir los polos de $G_o(s)$ pues son estables:

$$C_{a1}(s) = \frac{(s+a)^2}{(\tau s + 1)^2} \approx [G_o(s)]^{-1} \qquad ; \tau \ll 1$$

La inversa de la parte lineal se ha escogido de manera que el inverso sea exacto a frecuencia $\omega = 0$, es decir, $G_o(j0)^{-1} = C_{a1}(j0) = a^2$. De hecho es posible lograr inverso perfecto a referencia constante si se escoge un controlador igual a dicha ganancia, es decir:

$$C_{a2}(s) = a^2$$

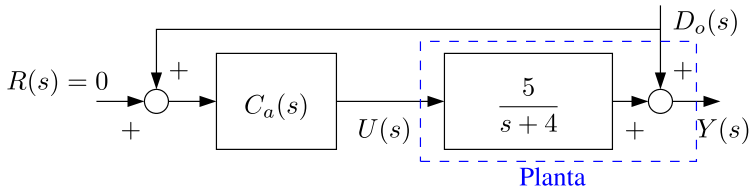
El controlador de lazo abierto es de la forma:



Note que

- Si $C_a(s) = C_{a1}(s)$ entonces la función de transferencia entre $r(t)$ e $y(t)$ es $H_1(s) = \frac{1}{(\tau s+1)^2}$
- Si $C_a(s) = C_{a2}(s)$ entonces la función de transferencia entre $r(t)$ e $y(t)$ es $H_2(s) = \frac{a^2}{(s+a)^2}$

Problema 1.3 (10 puntos) *En el esquema de control lineal en lazo abierto de la figura, determine **todas** las condiciones que debe satisfacer el controlador $C_a(s)$ para compensar perfectamente en estado estacionario una perturbación de salida de la forma $d_o(t) = A\cos(3t + \phi)$.*



Solución

- El controlador debe ser realizable, es decir, debe tener grado relativo mayor o igual que cero, es decir, debe ser propio, es decir, tener a lo más tantos ceros como polos
- El controlador debe ser estable, es decir, todos sus polos deben tener parte real estrictamente negativa
- El efecto de la perturbación en la salida de la planta, considerando el control en lazo abierto, es:

$$Y(s) = [1 + C_a(s)G_o(s)]D_o(s)$$

  Por lo tanto, la perturbación de frecuencia $\omega = 3$[rad/s] será compensada perfectamente en estado estacionario en la salida si, y solo si, en controlador satisface la condición:

$$1 + C_a(j3)G_o(j3) = 0 \quad \iff \quad C_a(j3) = \frac{-1}{G_o(j3)} = \frac{-j3-4}{5}$$

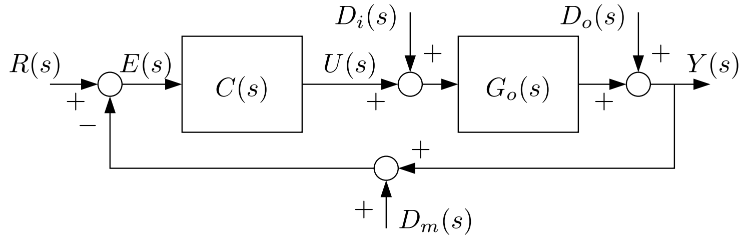


Figura 1: Lazo de control nominal con un grado de libertad

Problema 1.4 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1, el controlador es $C(s) = K_p$, en que $K_p > 0$, y el modelo nominal de la planta es $G_o(s) = \frac{1}{s}$. Determine la máxima magnitud de la actuación, $|u(t)|$, cuando la perturbación de salida es un escalón unitario (suponiendo que las demas señales de entrada y las condiciones iniciales son cero).*

Solución

La función de transferencia entre la perturbación de salida $d_o(t)$ y la acción de control $u(t)$ es (el negativo de) la sensibilidad de control nominal:

$$\frac{U(s)}{D_o(s)} = \frac{-C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{-K_p}{1 + \frac{1}{s}K_p} = \frac{-K_p s}{s + K_p}$$

Si la perturbación de salida es un escalón unitario $d_o(t) = u(t)$, entonces tenemos que

$$D_o(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{-K_p}{s + K_p} \quad \Rightarrow \quad u(t) = -K_p e^{-K_p t} \mu(t)$$

Es decir, la actuación es una exponencial decreciente cuya máxima magnitud se produce en $t = 0_+$ y, en este caso, es igual a $|u(0_+)| = |-K_p| = K_p$

Problema 1.5 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1, el controlador y el modelo nominal de la planta son respectivamente:*

$$C(s) = \frac{K_c}{s} \qquad G_o(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_o}$$

Si valor de $K_c > 0$ está fijo, determine todos los pares de valores en un plano (a_1, a_o) para los cuales el lazo es internamente estable.

Solución

El polinomio característico de lazo cerrado en este caso es igual a

$$A_{cl}(s) = (s^2 + a_1 s + a_0)s + K_c = s^3 + a_1 s^2 + a_0 s + K_c$$

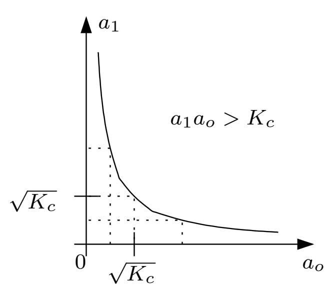
Las condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de este polinomio tengan parte real negativa (y, por ende, el lazo sea internamente estable) se obtienen del arreglo de Routh:

$$\begin{array}{c|cc} \mathbf{s^3} & 1 & a_0 \\ \mathbf{s^2} & a_1 & K_c \\ \mathbf{s} & \frac{a_1 a_0 - K_c}{a_1} & 0 \\ \mathbf{1} & K_c & \end{array}$$

Por tanto, el lazo es internamente estable si, y sólo si, no hay cambios de signo en la primera columna de la tabla obtenida, es decir:

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ \frac{a_1 a_0 - K_c}{a_1} &> 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 a_o > K_c \\ K_c &> 0 \end{aligned}$$

Gráficamente, $a_1 a_o = K_c > 0$ corresponde a una hipérbola en el primer cuadrante. Los pares de valores (a_1, a_o) que garantizan estabilidad interna se ubican *sobre* dicha curva:



Problema 1.6 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1, el modelo nominal de la planta es*

$$G_o(s) = \frac{(-s+1)}{(-s+2)(s+3)}$$

El controlador $C(s)$ es estabilizante, racional, bipropio y con integración. Con la información proporcionada, determine todas las características que sea posible de la función de sensibilidad de control nominal $S_{uo}(s)$.

Solución

El controlador $C(s)$ es estabilizante, racional, bipropio y con integración, es decir, es de la forma:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{P(s)}{s\tilde{L}(s)}$$

en que el grado de $P(s)$ y $L(s)$ es n_c

La sensibilidad de control nominal es de la forma:

$$S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1+G_o(s)C(s)} = \frac{A_o(s)P(s)}{A_o(s)L(s)+B_o(s)P(s)} = \frac{(-s+2)(s+3)P(s)}{(-s+2)(s+3)s\tilde{L}(s)+(-s+1)P(s)}$$

- $S_{uo}(s)$ es estable, pues el controlador es estabilizante.
- $S_{uo}(s)$ es bipropia, pues el grado de $A_oP(s)$ es igual al grado de $A_o(s)L(s)$ y por tanto igual al de $A_o(s)L(s)+B_o(s)P(s)$.
- A frecuencia cero ($s=0$):

$$S_{uo}(0) = \frac{6}{6\cdot 0\cdot \tilde{L}(0)+1\cdot P(0)} = 6 \quad \left(= \frac{1}{G_o(0)}\right)$$

- El polo inestable de la planta en $s=2$ aparece como cero de $S_{uo}(s)$ pues, de otra forma, si es cancelado, sería polo de lazo cerrado. Por tanto

$$S_{uo}(2) = 0$$

- El polo estable de la planta en $s=-3$ tenemos que
    1. Puede ser cancelado con un cero del controlador, es decir, $P(s)=(s+3)\tilde{P}(s)$, en cuyo caso

    $$S_{uo}(s) = \frac{(-s+2)(s+3)\tilde{P}(s)}{(-s+2)s\tilde{L}(s)+(-s+1)\tilde{P}(s)} \quad \Rightarrow \quad S_{uo}(-3)=0$$

    2. O bien, no es cancelado por ceros del controlador, en cuyo caso también tenemos que $S_{uo}(-3)=0$
- En el cero inestable de la planta en $s=1$ se tiene que

$$S_{uo}(1) = \frac{P(1)}{L(1)} < \infty$$

de otra forma $L(1)=0$ y $s=1$ sería polo de lazo cerrado.

Problema 1.7 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1, suponga que no existen cancelaciones entre polos y ceros y que la sensibilidad complementaria nominal es*

$$T_o(s) = \frac{2\sqrt{2}s + 4}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}$$

Si existe una perturbación de salida de la forma $d_o(t) = \cos(2t)$*, determine la salida* $y(t)$ *en estado estacionario (si existe).*

Solución

Dado que no hay cancelaciones, el polinomio de lazo cerrado coincide con el denominador de la función de sensibilidad nominal complementaria:

$$A_{cl}(s) = s^2 + 2\sqrt{2}s + 4$$

Los coeficientes del polinomio de segundo orden son positivos, por tanto sus raíces tienen parte real negativa. Es decir, el lazo es internamente estable y sus modos naturales decaen a cero.

Por ende, la solución estacionaria se puede obtener a partir de la respuesta en frecuencia de la sensibilidad nominal para $\omega = 2$.

Es decir,

$$S_o(s) = 1 - T_o(s) = \frac{s^2}{s^2 + 2\sqrt{2}s + 4}$$

Por tanto,

$$S_o(j2) = \frac{-4}{-4 + 2\sqrt{2} \cdot j2 + 4} = \frac{-1}{\sqrt{2}j} = \frac{j}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle \frac{\pi}{2}$$

La salida de la planta en estado estacionario es entonces

$$y_{ee}(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(2t + \tfrac{\pi}{2}\right)$$

Problema 1.8 (10 puntos) *Considere un lazo de control como el de la Figura 1, internamente estable y en* ***la planta*** *tiene un polo en el origen $s = 0$, pero el controlador no. Se afirma que tal lazo de control, en estado estacionario, compensa perfectamente perturbaciones (de entrada y de salida) de tipo escalón y sigue perfectamente referencias de tipo escalón. Demuestre o refute esta afirmación fundamentando claramente su respuesta.*

Solución

El lazo es internamente estable y, por ende, lo son todas las funciones de transferencia.

Dado que la planta tiene un polo en $s = 0$, su ganancia a continua es **infinita**, es decir, $\lim_{s\to 0} G_o(s) = \infty$

El controlador por su parte **no** tiene polos en $s = 0$, por tanto su ganancia a continua es finita, es decir, $C(0) < \infty$.

Por lo tanto, tenemos que

$$T_o(s) = \frac{G_o(s)C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{C(s)}{1/G_o(s) + C(s)} \quad \xrightarrow{s\to 0} \quad T(0) = \frac{C(0)}{0 + C(0)} = 1$$
$$S_o(s) = 1 - T_o(s) \quad \Rightarrow \quad S_o(0) = 0$$

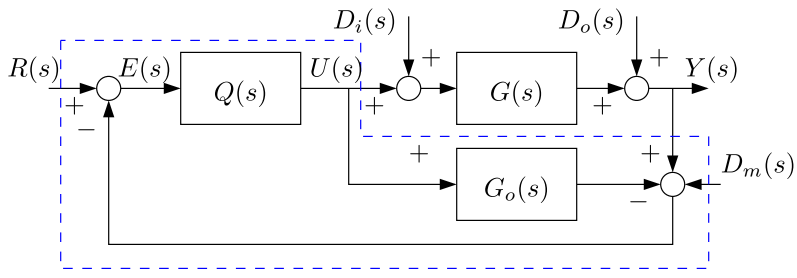
Es decir, el lazo presenta seguimiento perfecto y compensación perfecta de perturbaciones **de salida** a frecuencia cero. Sin embargo, la sensibilidad de entrada es

$$S_{io}(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{1}{1/G_o(s) + C(s)} \quad \xrightarrow{s\to 0} \quad S_{io}(0) = \frac{1}{C(0)} \neq 0$$

Por tanto, el lazo no es capaz de compensar perturbaciones de entrada de tipo escalón.

La afirmación es **FALSA**.

Problema 1.9 (10 puntos) *En el lazo de control de la figura, determine la función de tranferencia entre la perturbación de salida $d_o(t)$ y la salida $y(t)$ cuando el error de modelado multiplicativo es $G_\Delta(s) = 0$*



Solución

Primero podemos notar que el error de modelado multiplicativo

$$G_\Delta(s) = \frac{G(s) - G_o(s)}{G_o(s)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G_o(s) = G(s)$$

Por tanto, podemos usar este hecho al obtener la función de transferencia entre $d_o(t)$ e $y(t)$.
Asumiendo $R(s) = D_i(s) = D_m(s) = 0$ (el lazo es lineal por tanto usamos superposición) tenemos que

$$\begin{aligned} Y(s) &= D_o(s) + G(s)U(s) \\ U(s) &= Q(s)E(s) \\ E(s) &= -[Y(s) - G_o(s)U(s)] \end{aligned}$$

De las 3 ecuaciones anteriores eliminamos $U(s)$:

$$\begin{aligned} Y(s) &= D_o(s) + G(s)Q(s)E(s) \\ E(s) &= -Y(s) + G_o(s)Q(s)E(s) \end{aligned}$$

y luego $E(s)$:

$$Y(s) = D_o(s) + G(s)Q(s)\frac{-Y(s)}{1 - G_o(s)Q(s)}$$

Despejando $Y(s)$, tenemos que

$$[1 - G_o(s)Q(s) + G(s)Q(s)]Y(s) = [1 - G_o(s)Q(s)]D_o(s)$$

Dado que $G_o(s) = G(s)$ finalmente obtenemos la función de transferencia buscada:

$$\frac{Y(s)}{D_o(s)} = 1 - G_o(s)Q(s)$$