Control Automático I – ELO-270 – S2, 2009
Tercer Certamen y soluciones

Problema 3.1 (10 puntos) *Considere la planta*

$$G_o(s) = \frac{-s+1}{(s+1)(s+a)}$$

en que $a > 0$. Si se aplica el método de oscilación de Ziegler y Nichols. Determine el valor de la ganancia crítica K_c y del período de oscilación P_c obtenidos del experimento.

Solución

El método de oscilación se aplica a plantas estables, cerrando el lazo con un controlador proporcional $C(s) = K_p$ y aumentando la ganancia hasta que el lazo muestre una oscilación sostenida.

Para determinar la ganancia crítica a la que se presenta la oscilación obtenemos primero el polinomio de lazo cerrado:

$$A_{cl}(s) = (s+1)(s+a) + K_p(-s+1) = s^2 + (a+1-K_p) + (a+K_p)$$

Donde se aprecia que los polos de lazo cerrado se ubican sobre el eje $j\omega$ si y sólo si

$$a + 1 - K_p = 0 \quad \Rightarrow \quad K_p = a + 1 = K_c$$

Para ese valor crítico de la ganancia, la frecuencia de oscilación se obtiene del polinomio de lazo cerrado resultante:

$$A_{cl}(s) = s^2 + (a + K_c) = s^2 + (2a+1) = s^2 + \omega_c^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \sqrt{2a+1}$$

Por tanto, el período de la oscilación sostenida es

$$P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{2a+1}}$$

Problema 3.2 (10 pts.) *Considere una planta cuyo modelo nominal es*

$$G_o(s) = \frac{15}{s-10}$$

Plantee la ecuación polinomial (no es necesario resolverla) que permite obtener un controlador ***apropiado*** *tomando en cuenta que:*

1. *Se desea error estacionario igual a cero para una referencia* $r(t) = A_o + A_1 \sin(3t + \alpha)$
2. *El error de modelado multiplicativo,* $G_\Delta(s)$*, es* significativo *para* $\omega > 8$ *[rad/s].*

Solución

La planta es de orden $n = 1$. Para seguir la referencia mencionada el controlador debe tener un polo en el origen y polos imaginarios en $s = \pm j3$. Estas son **tres** restricciones y, por ende, el orden del controlador debe ser $n-1+3 = 3$:

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{(p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0)}{s(s^2+9)}$$

Se deben asignar $2n - 1 + 3 = 4$ polos de lazo cerrado. Para la elección estos polos es recomendable que el ancho de banda sea **mayor** que la magnitud del polo inestable en $s = 10$, para reducir el *overshoot*, pero **menor** que 8[rad/s] para asegurar estabilidad robusta del lazo de control. Estos requisitos se contraponen, sin embargo, es prioritario garantizar estabilidad del lazo a costa de tolerar el *overshoot*.

Un posible eleccion está dada en la ecuación:

$$A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = A_{cl}(s)$$
$$(s-5)s(s^2+9) + 8(p_3 s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s^2 + 9s + 36)(s+8)^2$$

Note que en esta ecuación existen 4 incógnitas (p_0, p_1, p_2, p_3) y se obtienen 4 ecuaciones (pues los polinomios a ambos lados de la igualdad son mónicos y de orden 5).

Problema 3.3 (10 puntos) *En un lazo de control con un grado de libertad se tiene que*

$$G_o(s) = \frac{-s+3}{(s-1)(s+10)} \qquad S_o(s) = \frac{(s-1)s}{s^2+7s+25}$$

Se afirma que el lazo es internamente estable. Demuestre o refute dicha afirmación.

Solución

Si el lazo es internamente estable se deben cumplir las condiciones de interpolación:

- $S_o(p) = 0$, para cada uno de los polos inestables p de la planta, y
- $S_o(c) = 1 - T_o(c) = 1$, para cada uno de los ceros inestables c de la planta.

Notamos que para la función de sensibilidad dada

- En el polo inestable de la planta $p = 1$, se tiene que $S_o(1) = 0$
- …pero, en el cero inestable de la planta $c = 3$, se tiene que $S_o(3) \neq 1$

Por tanto el lazo cerrado es inestable. La afirmación es **FALSA**.

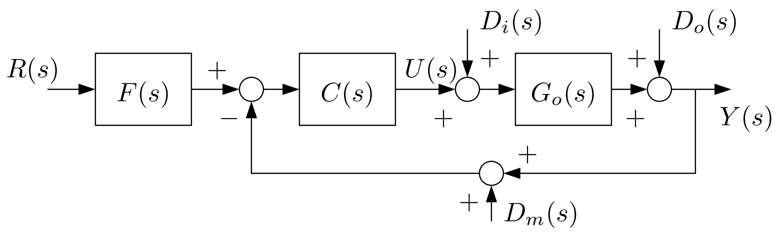
La misma conclusión se obtiene calculando el controlador asociado a la planta y función de sensibilidad nominal dadas:

$$S_o(s) = \frac{1}{1+G_o(s)C(s)} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C(s) = \frac{1-S_o(s)}{S_o(s)G_o(s)} = \frac{(8s+25)(s+10)}{s(-s+3)}$$

Donde se aprecia que existe una cancelación inestable.

Problema 3.4 (10 puntos) *En el sistema de control de la figura* $\quad G_o(s) = \dfrac{1}{s-1}$

Diseñe un controlador $C(s)$ y un bloque de prealimentación de la referencia $F(s)$ que garanticen que el sistema sea internamente estable y que, cuando la referencia $r(t)$ es de tipo escalón, la salida $y(t)$ ***no presente overshoot*** *y sea igual a la referencia en estado estacionario.*



Solución

Note que si sólo se utiliza un controlador con integración (por ejemplo, un *PI*) estabilizante, pero sin usar el grado de libertad adicional dado por el bloque de prealimentación de la referencia (es decir, $F(s) = 1$), siempre existe *overshoot*. Si bien este se puede reducir eligiendo el ancho de banda más rápido que la magnitud del polo inestable, **no se puede eliminar**.

Para garantizar que no exista *overshoot* tenemos (al menos) dos alternativas

1. Diseñamos un controlador estabilizante y con integración

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \quad \Rightarrow \quad T_o(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s^2 + (p_1 - 1)s + p_0}$$

   En que $p_1 > 1$ y $p_0 > 0$ garantizan un lazo estable y se pueden elegir para asignar arbitrariamente los polos de lazo cerrado.

   El bloque de prealimentación $F(s)$ debe ser estable y propio. Se elige de tal forma de tener una función de transferencia de primer orden y ganancia a continua unitaria entre $R(s)$ e $Y(s)$:

$$T_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = F(s)T_o(s) = \frac{1}{\tau\, s + 1} \quad ; 0 < \tau$$

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{s^2 + (p_1 - 1)s + p_0}{(\tau\, s + 1)(p_1 s + p_0)}$$

2. El controlador puede ser proporcional y diseñado para tener un lazo estable:

$$C(s) = K_p \quad \Rightarrow \quad T_o(s) = \frac{K_p}{s + (K_p - 1)}$$

   En que $K_p > 1$ garantiza un lazo estable y se puede elegir para asignar arbitrariamente el único polo de lazo cerrado.

   El bloque de prealimentación $F(s)$ debe ser estable y propio. Puede elegirse para ajustar la ganancia a continua:

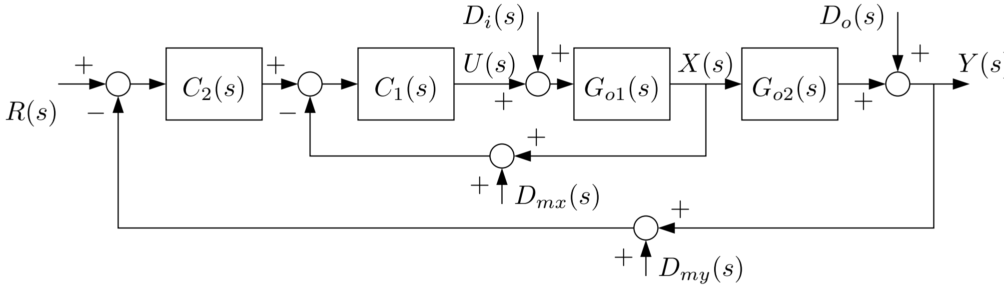
$$F(s) = \frac{1}{T_o(0)} = \frac{K_p - 1}{K_p} \quad \Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p - 1}{s + (K_p - 1)}$$

   o bien para tener una función de transferencia de primer orden y ganancia a continua unitaria entre $R(s)$ e $Y(s)$:

$$T_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = F(s)T_o(s) = \frac{1}{\tau\, s + 1} \quad ; 0 < \tau$$

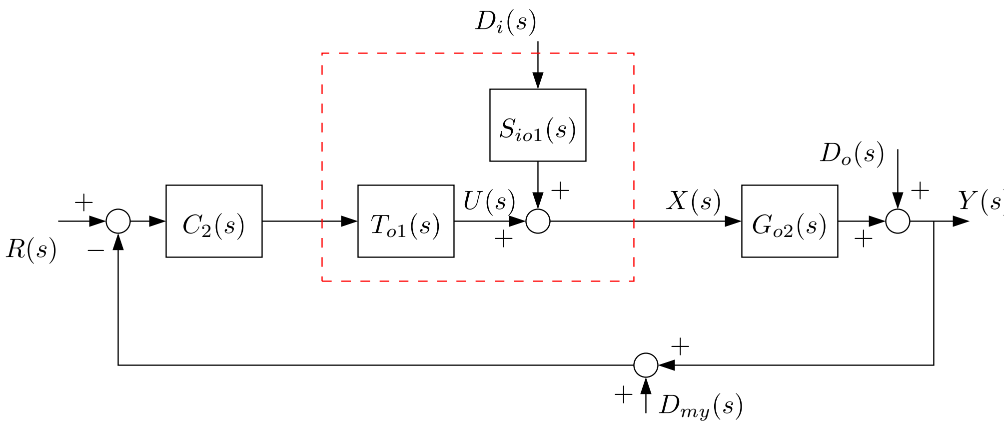
$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{s + (K_p - 1)}{K_p(\tau\, s + 1)}$$

Problema 3.5 (10 puntos) *En el sistema de control en cascada de la figura, determine la función de transferencia entre la perturbación de entrada* $d_i(t)$ *y la salida* $y(t)$



Solución

Dado que existen dos lazos anidados el problema se puede representar de manera equivalente usando las funciones de sensibilidad asociadas al lazo interno:



Por tanto

$$\frac{Y(s)}{D_i(s)} = \frac{S_{io1}(s)G_{o2}(s)}{1 + C_2(s)T_{o1}(s)G_{o2}(s)}$$

en que

$$S_{io1}(s) = \frac{G_{o1}(s)}{1 + G_{o1}(s)C_1(s)} \qquad \text{y} \qquad T_{o1}(s) = \frac{G_{o1}(s)C_1(s)}{1 + G_{o1}(s)C_1(s)}$$

Finalmente,

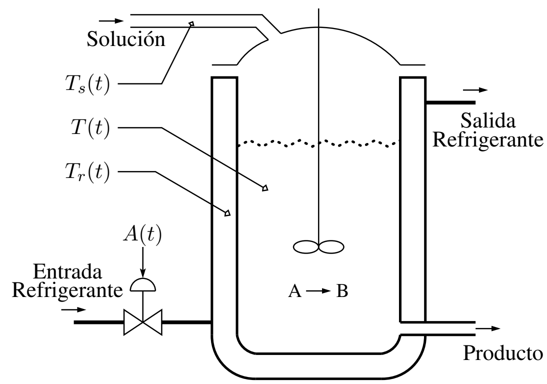
$$\frac{Y(s)}{D_i(s)} = \frac{G_{o1}(s)G_{o2}(s)}{1 + G_{o1}(s)C_1(s) + G_{o1}(s)G_{o2}(s)C_1(s)C_2(s)}$$

Problema 3.6 (10 pts.) *En la figura se muestra un tanque, refrigerado y con un agitador, en que se hace reaccionar A para obtener B. Dicha reacción genera calor, por lo cual interesa mantener controlada su temperatura $T(t)$, manipulando la apertura $A(t)$ de la válvula que determina el flujo de refrigerante a las paredes del tanque. $T_s(t)$ es la temperatura de la solución que ingresa al tanque. $T_r(t)$ es la temperatura del refrigerante en las paredes del tanque.*

1. *Haga un esquema del lazo de control si sólo se mide la temperatura $T(t)$, indicando el rol de $T_s(t)$ y $T_r(t)$.*

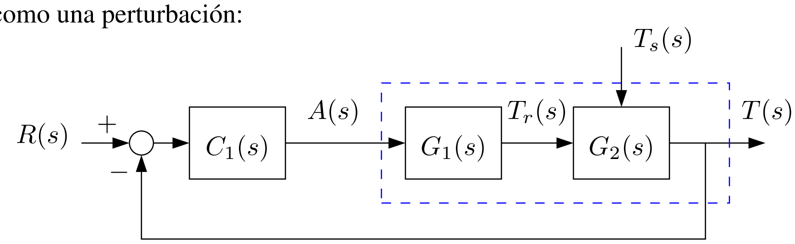
2. *Si, además de $T(t)$, se mide $T_r(t)$, pero no $T_s(t)$, indique qué esquema de control se podría implementar y sus ventajas respecto al esquema básico.*

3. *Si, además de $T(t)$, se mide $T_s(t)$, pero no $T_r(t)$, indique qué esquema de control se podría implementar y sus ventajas respecto al esquema básico.*

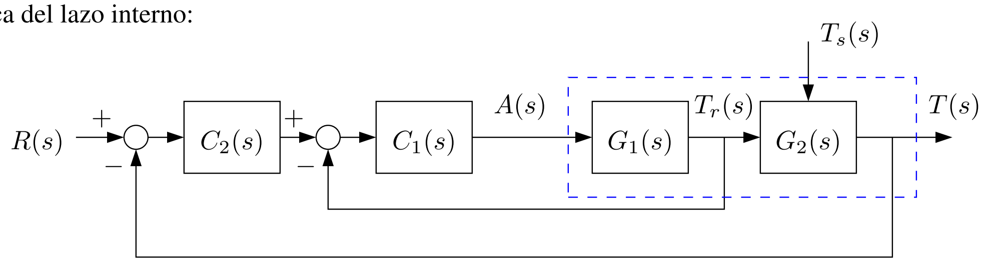


Solución

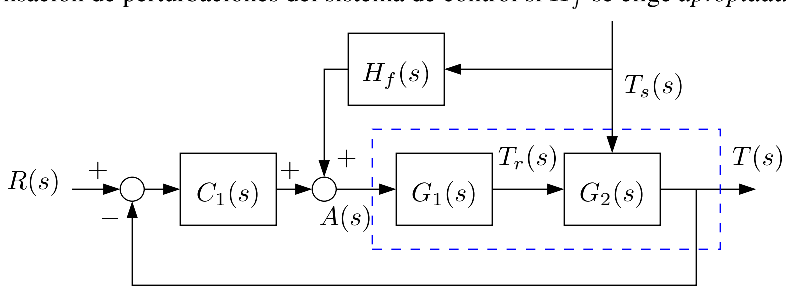
1. La entrada $u(t) = A(t)$ tiene un efecto sobre la variable intermedia $T_r(t)$ que, a su vez afecta la variable que interesa controlar $y(t) = T(t)$. Note que $T_s(t)$ también afecta esta variable de interés pero no es manipulable y por tanto actúa como una perturbación:



2. Si se mide la variable intermedia $T_r(t)$ se puede hacer control en cascada, esquema que permite mejorar la dinámica del lazo interno:



3. Si se mide $T_s(t)$ se puede implementar un esquema con prealimentación de la perturbación, el cual permite mejorar la compensación de perturbaciones del sistema de control si H_f se elige *apropiadamente*:



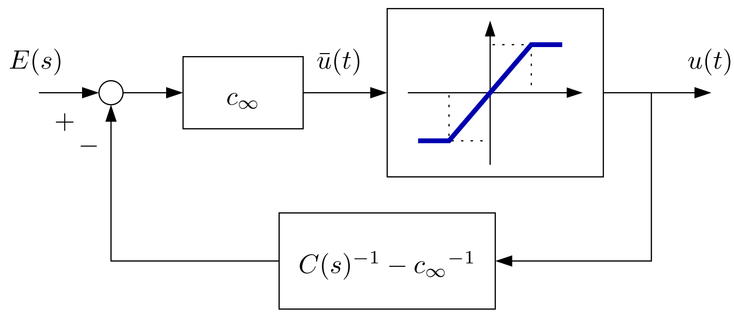
Problema 3.7 (10 puntos) *Suponga que se ha diseñado un controlador PID, obteniéndose*

$$C(s) = 5 + \frac{2}{s} + \frac{s}{0{,}2s+1}$$

Calcule todos los bloques de la implementación anti-enrollamiento de este controlador, para hacer frente al problema de saturación.

Solución

El mecanismo de anti-enrollamiento se implementa en un esquema con realimentación negativa en que hay dos bloques lineales y uno no-lineal. Este último es el que describe la característica de saturación.



Los bloques lineales se calculan a partir de $C(s)$. El primero de ellos, es un bloque de ganancia $c_\infty = C(\infty)$ y el segundo es un bloque dinámico de función de transferencia $[C(s)]^{-1} - [c_\infty]^{-1}$, donde

$$\begin{aligned}
c_\infty &= 10 \\
F(s) &= [C(s)]^{-1} - [c_\infty]^{-1} \\
&= \frac{s(s+5)}{10s^2+27s+10} - \frac{1}{10} \\
&= \frac{0{,}23s - 0{,}1}{s^2+2{,}7s+1}
\end{aligned}$$

JYE – 30 de noviembre de 2009