Certamen #2 ELO 270 S2 2014

Soluciones

1

Problema 2.1 (10 puntos) *Considere la planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{4e^{-0,2s}}{s+3}$$

Diseñe un controlador que garantice seguimiento perfecto a referencia constante y compensación de perturbaciones en la banda de 2 a 5 [rad/s]

en estado estacionario

Solución

Requisitos de diseño:

- Seguimiento perfecto en e.e. a referencia constante se logra con un controlador con integración $\Rightarrow r = 1$
- Compensación de perturbaciones en la banda de 2 a 5 rad/s se logra eligiendo $B_w(T_o) > 5$

Para diseñar el controlador (y elegir ancho de banda de T_o) es necesario "lidiar" con el retardo.

i) Si se desprecia entonces $G_\Delta = e^{-0,2s} - 1$ se hace no despreciable para frecuencias a partir de $\omega = \frac{1}{0,2} = 5$ por tanto $B_w(T_o) < 5$ para garantizar estabilidad robusta. En conclusión, no es viable

ii) Se puede usar Padé: $G_o(s) \approx \frac{4}{s+3} \; \frac{-\frac{0,2}{2}s + 1}{\frac{0,2}{2}s + 1} = \frac{-4(s-10)}{(s+3)(s+10)}$

Con lo que se logra G_Δ de magnitud despreciable en un ancho de banda más amplio que $[0,5]$ $\frac{rad}{s}$ (De hecho $|G_\Delta| < 1$ hasta aproximadamente $\frac{3}{0,2} = 15 \left[\frac{rad}{s}\right]$)

Diseñamos $C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+l_0)}$ ($n_p = n - 1 + r$ en que $n = 1$, $r = 1$)

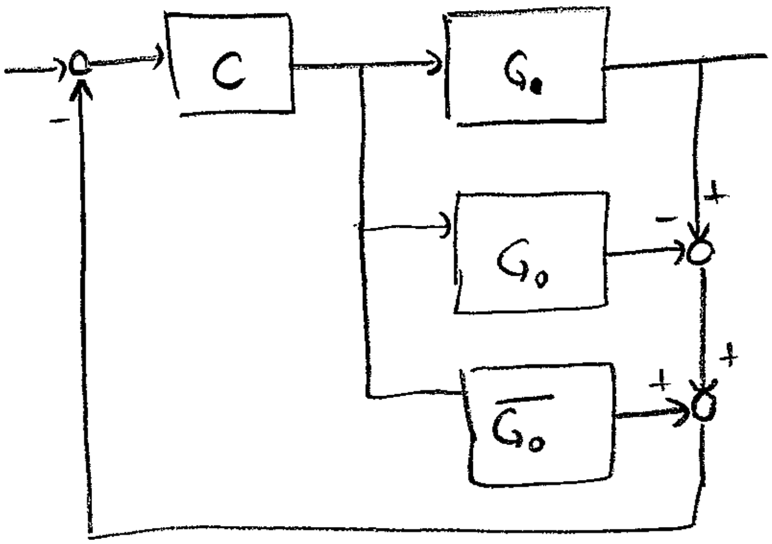
Asignación de polos: $A_o L + B_o P = A_{cl}$

$$(s+3)(s+10)(s)(s+l_0) + (-4)(s-10)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+1$$

$\xi = 0,7$
$\omega_n = 8$

Lo que garantiza $B_w(T_o) > 5 \left[\frac{rad}{s}\right]$

(iii) Otra opción es usar el predictor de Smith (no hay problema pues G_o es estable)



$$G_o = e^{-0{,}25}\,\overline{G_o}$$

$$\overline{G_o} = \frac{4}{s+3}$$

Diseñamos $C(s)$ por asignación de polos:

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \\ r=1 \end{array}\right\} n_p = n-1+r = 1 \Rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

Ecuación diofantina

$$A_o L + B_o P = A_{cl}$$

$$(s+3)s + 4(p_1 s + p_0) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\xi = 0.7$$

$$\omega_n = 8$$

Lo que garantiza de nuevo $B_w(T_o) > 5 \left[\frac{rad}{s}\right]$

Problema 2.2 (10 puntos) *En un lazo de control nominal, la sensibilidad es*

$$S_o(s) = \frac{s(s+4,2)}{s^2+4,2s+9}$$

Si la referencia es un escalón unitario y la perturbacion de salida es $d_o(t) = 0,5sin(0,2t)$, determine la salida de la planta $y(t)$ en estado estacionario.

Solución

La salida en estado estacionario es la superposición de la respuesta (en estado estacionario) a:

i) El escalón unitario de referencia

$$T_o(0) = 1 - S(0) = 1 \Rightarrow y_1(t) = 1$$

ii) La sinusoide de perturbación de salida de frecuencia $w = 0.2$

$$S_o(j0,2) = \frac{j0,2(j0,2+4,2)}{-0,04 + j0,2 \cdot 4.2 + 9} = \frac{-0,04 + j0,84}{-0,04 + j0,84 + 9}$$

$$\approx \frac{j0.84}{9} \approx 0,09j$$

$$\Rightarrow y_2(t) \approx 0,09 \times 0,5 \operatorname{sen}(0,2t + \pi/2)$$

Por tanto, la salida es (aproximadament) igual a

$$y(t) = 1 + 0,045 \operatorname{sen}(0,2t + \pi/2)$$

Problema 2.3 (10 puntos) *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{16}{s^2 + 4{,}8s + 16}$$

(a) Determine un controlador estabilizante y propio tal que

$$T_o(s) = \frac{\alpha^2}{s^2 + 1{,}3\alpha s + \alpha^2}$$

(b) Determine $u(0^+)$ en función de α cuando la referencia es un escalón unitario.

Solución

(a) El controlador se puede determinar de varias formas. Por ejemplo, despejando C

$$T_o = \frac{G_o C}{1 + G_o C} \Rightarrow C = \frac{T_o}{G_o(1 - T_o)}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha^2}{s^2 + 1{,}3\alpha s + \alpha^2}}{\dfrac{16}{s^2+4{,}8s+16}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{s^2+1{,}3\alpha s+\alpha^2}\right)}$$

$$= \frac{\alpha^2 (s^2 + 4{,}8s + 16)}{16 \quad s(s + 1{,}3\alpha)}$$

(b) $u(0^+) = \lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{s\to\infty} s\,U(s)$ en que $U(s) = \frac{1}{s} S_{uo}(s)$

pero $S_{uo}(s) = \dfrac{T_o(s)}{G_o(s)}$

$$\Rightarrow u(0^+) = \lim_{s\to\infty} \frac{\alpha^2 (s^2 + 4{,}8s + 16)}{16(s^2 + 1{,}3\alpha s + \alpha^2)} = \frac{\alpha^2}{16} = \left(\frac{Bw(\text{lazo cerrado})}{Bw(\text{lazo abierto})}\right)^2$$

Problema 2.4 (10 puntos) *El modelo nominal de una planta es*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+2}$$

Se sabe que el ruido de medición $d_m(t)$ es no despreciable para frecuencias mayores que 3 [rad/s] y se desea buen seguimiento a referencias de hasta 10 [rad/s]. Diseñe un sistema de control apropiado.

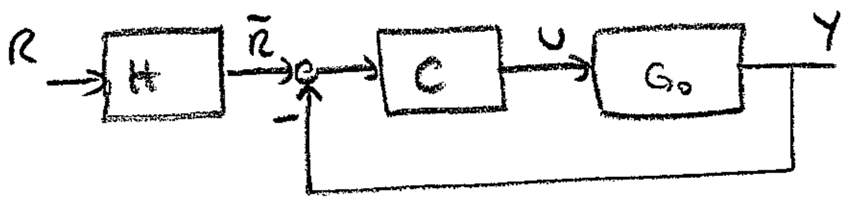
Solución

Requisitos de diseño:

i) Ruido de medición $\Rightarrow$ $B_W(T_o) < 3 \ \frac{rad}{s}$

ii) Seguimiento a referencia $\Rightarrow$ $B_W(T_o) > 10 \ \frac{rad}{s}$

Hay una contradicción entre los requisitos, por tanto se requieren grados de libertad adicionales. En este caso, podemos mejorar el seguimiento a referencia usando prealimentación:



$C(s)$ | se diseña para $B_W(\bar{T}_o) < 3$ en que $\bar{T}_o = \frac{Y}{\bar{R}}$
se incluye integración

$\left.\begin{matrix} n=1 \\ r=1 \end{matrix}\right\} \; n_p = n-1+r = 1 \Rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$

Ecuación diofantina: $A_o L + B_o P = A_{cl}$

$$(s+2)s + 1(p_1 s + p_0) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 \quad \left\{\begin{matrix} \xi = 0.7 \\ \omega_n = 1 \end{matrix}\right.$$

$2 + p_1 = 1.4 \Rightarrow p_1 = -0.6$

$p_0 = 1$

$\underline{H(s)}$ / Se diseña para $Bw(T_0) > 10$ en que $T_0 = \frac{Y}{R}$

$$T_0 = H\,\overline{T_0} \quad \text{en que} \quad \overline{T_0} = \frac{G_0 C}{1+G_0 C}$$

$$= \frac{-0{,}6s+1}{s^2+1{,}4s+1}$$

Por tanto, se elige por ejemplo

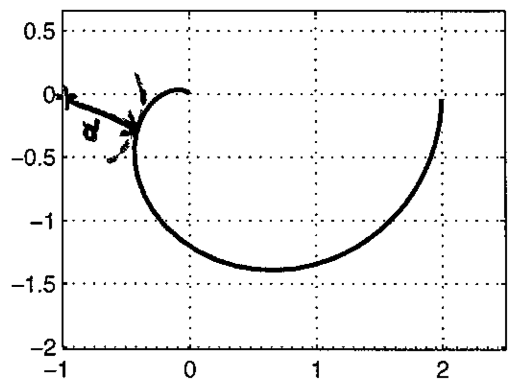
$$H(s) = \frac{(s^2+1{,}4s+1)\,\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad \text{en que} \quad \begin{array}{l} \xi = 0.7 \\ \omega_n = 12 \end{array}$$

Problema 2.5 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Nyquist (para $\omega \geq 0$) de una transferencia en lazo abierto $G_o(s)C(s)$, estrictamente propia, estable y sin cancelaciones inestables. Para el lazo de control asociado:*

(a) Determine si es internamente estable.

(b) Estime $\max_{\omega} |S_o(j\omega)|$.

(c) Determine si el lazo es capaz de seguir perfectamente en estado estacionario referencias constantes.



Solución

(a) Se dice que G_oC es estable $\Rightarrow P = 0$

y el diagrama de Nyquist no encierra el $(-1,0) \Rightarrow N = 0$

$N = Z - P \Rightarrow Z = N + P = 0$ polos inestables de lazo cerrado

$\therefore$ el lazo es internamente estable (pues no hay cancelaciones inestables, además)

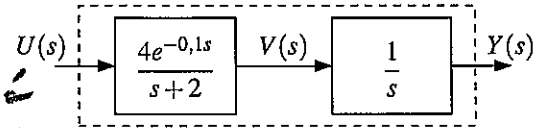
(b) El peak de sensibilidad $= \max_{\omega} |S_o(j\omega)|$ se puede obtener a partir del punto más cercano del Nyquist al $(-1,0)$. Del gráfico $d \approx 0{,}66$

Por tanto $\max_{\omega} |S_o(j\omega)| \approx \frac{1}{0.66} \approx \frac{3}{2}$

(c) Del gráfico $G_oC\big|^{5}_{\omega=0} = 2 \Rightarrow T_o(0) = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$

Por tanto NO hay seguimiento estacionario a referencias constantes.

Problema 2.6 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de bloques de un motor en que se puede medir la velocidad $v(t)$ y la posición $y(t)$.*



de posición

Diseñe un sistema de control tal que perturbaciones constantes (de entrada, de salida, u otra) sean perfectamente compensadas en estado estacionario y que los modos naturales del lazo cerrado decaigan al menos tan rápido como e^{-5t}.

Solución

Requisitos de diseño

i) Compensar perturbaciones constantes $\Longrightarrow$ Integración en el controlador $(r=1)$

ii) Modos naturales más rápidos que e^{-5t} $\Longrightarrow$ polos de lazo cerrado a la izquierda de $s=-5$

* La planta tiene retardo, si se desprecia hay que considerar límite superior al ancho de banda dado por G_Δ : $B_w(T_o) < \frac{1}{0,1} = 10$

* Note que no es necesario usar control en cascada

Diseño de $C(s)$ por asignación de polos para $G_o(s) = \frac{4}{(s+2)s}$

$$\left.\begin{matrix} n=2 \\ r=1 \end{matrix}\right\} n_p = n-1+r = 2 \Longrightarrow C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+l_0)}$$

Ecuación diofantina: $A_o L + B_o P = A_{cl}$

$$s(s+2)s(s+l_0) + 4(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = \underbrace{(s+5)(s+6)(s+7)(s+8)}_{\text{por ejemplo}}$$

De donde se obtiene $\{l_0, p_2, p_1, p_0\}$