$\boxed{\text{Solución}}$

ELO270 – S2 2014 – Control #5 – 19 de noviembre de 2014

Responda SOLO UNO de los dos problemas propuestos.
Indique claramente cuál de los dos responde.

Problema 5.1 *Considere una planta descrita por la función transferencia*

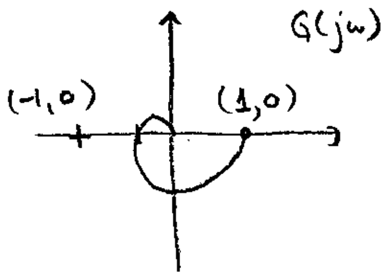
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Si se aplica el método de oscilación de Ziegler&Nichols, determine la ganancia crítica K_c y el período P_c de la oscilación que se obtendría.

En el método de oscilación de Z&N se busca la ganancia (del controlador) que hace que aparezca una oscilación sostenida en el lazo.

Hay (al menos) 2 formas de encontrar la ganancia K_c y período P_c

i) A partir del Nyquist: se puede determinar el cruce por el eje real negativo



$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+1)^3} = \frac{1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{1}{(1-3\omega^2) + j\omega(3-\omega^2)}$$

por tanto $\measuredangle G(j\omega) = -\pi \iff 3 - \omega^2 = 0$

$$\omega_c = \sqrt{3} \Downarrow \boxed{P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow G(j\omega_c) = \frac{1}{1-3(\sqrt{3})^2} = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow K_c G(j\omega_c) = -1$$

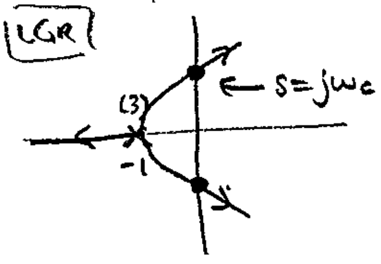
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{K_c = 8}$$

ii) LGR y Routh:

Note que $A_{cl}(s) = (s+1)^3 + K_c = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K_c$

$\boxed{\text{LGR}}$



El cruce del LGR con el eje $j\omega$ se encuentra con Routh

s^3	1	3
s^2	3	$1+K_c$
s	$(9-(1+K_c))/3$	0
1	$1+K_c$	

Hay oscilación ssi $9-(1+K_c) = 0 \iff \boxed{K_c = 8}$

en el A_{cl} $\Rightarrow \omega_c = \sqrt{3}$

$\boxed{P_c = 2\pi/\sqrt{3}}$

Problema 5.2 *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s+1}$$

Diseñe un controlador estabilizante que garantice seguimiento perfecto en estado estacionario a referencias de tipo escalón y que compense perturbaciones de salida de frecuencia en torno a los 4 [rad/s].

Los requisitos de diseño son

i) estabilidad : polos de lazo cerrado en el SPI

ii) $T_o(0) = 1$ $\Longrightarrow$ Se diseña controlador c/integración

iii) $S_o(\pm j4) \approx 0$ $\Longrightarrow$ Se escoge ancho de banda del lazo $> 4 \frac{rad}{s}$ y/o se fuerza polos resonantes $(s^2 + 4^2)$ en el controlador

Además

iv) Retardo : se desprecia, se aproxima o se usa el predictor de Smith

Por tanto hay <u>varias soluciones posibles</u>.

Por ejemplo

1) Si se desprecia el retardo, diseñamos para $\overline{G}_o(s) = \dfrac{1}{s+1}$

pero se introduce error de modelado : $G_\Delta(s) = e^{-0,1s} + 1$

que se hace no despreciable ($|G_\Delta(j\omega)| > 1$) para $\omega > \frac{1}{0,1} = 10 \left[\frac{rad}{s}\right]$

lo que establece un límite para el ancho de banda superior

Usamos asignación de polos forzando integración en el controlador

$\left.\begin{array}{l} n = 1 \\ r = 1 \end{array}\right\}$ por tanto el orden del controlador es $n_p = n - 1 + r = 1$

y se escogen $n_c = 2n - 1 + r = 2$ polos de lazo cerrado

La estructura del controlador es

$$C(s) = \frac{P(s)}{L(s)} = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$ controlador de primer orden con integración (es decir, un PI)

La ecuación diofantina es

$$A_{cl} = A_0 L + B_0 P$$

$$\underbrace{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}_{} = (s+1)s + 1(p_1 s + p_0)$$

Escogemos, por ejemplo, $\omega_n = 8$, $\xi = 0{,}7$ para garantizar ancho de banda MAYOR a $4 \frac{rad}{s}$ pero MENOR que $10 \frac{rad}{s}$

$$\Rightarrow \quad s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + (p_1+1)s + p_0$$

$$p_0 = \omega_n^2 = 64$$

$$p_1 = 2\xi\omega_n - 1 = 10{,}2$$

$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{10{,}2 s + 64}{s}$$

* Se puede verificar

$$T_0(s) = \frac{10{,}2 s + 64}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{10{,}2 s + 64}{s^2 + 11{,}2 s + 64} \Leftrightarrow S_0 = \frac{s(s+1)}{s^2 + 11{,}2 s + 64}$$

$$\Rightarrow \quad T_0(0) = 1$$

$$|S_0(\pm j4)| = \left| \frac{\pm j4(\pm j4 + 1)}{-16 \pm 44{,}8j} \right| = \left| \frac{-16 \pm j4}{48 \pm 44{,}8j} \right| \approx \frac{17}{60} \approx \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ Es decir corresponde a una atenuación de la perturbación de salida de aproximadamente 12 dB