Certamen #1 – ELO270 – S2 2015
Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *Un sistema está descrito por el modelo*

$$\frac{dy(t)}{dt} + y^3(t) - \alpha y(t) = 2u(t)$$

Determine si el modelo linealizado en torno a un punto de operación en equilibrio es o no estable.

Solución

El punto de operación en equilibrio se supone (u_Q, y_Q) tal que

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(y_Q)}_{0} + (y_Q)^3 - \alpha y_Q = 2u_Q$$

Ahora linealizamos reemplazando

$$u(t) = u_Q + \Delta u(t)$$
$$y(t) = y_Q + \Delta y(t)$$

en la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}(\Delta y(t)) + (y_Q + \Delta y(t))^3 - \alpha(y_Q + \Delta y(t)) = 2(u_Q + \Delta u(t))$$

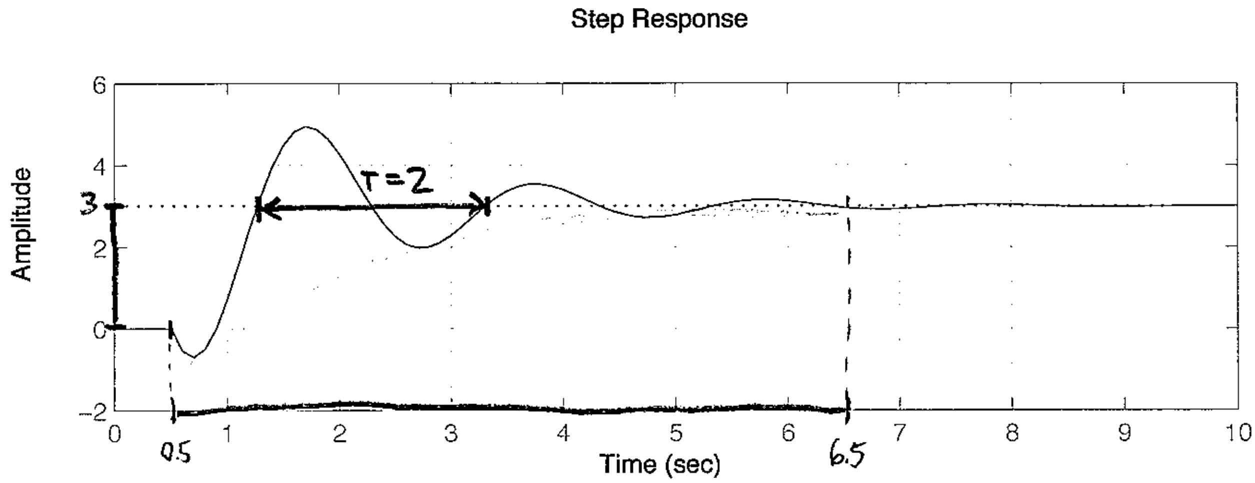
Reemplazamos la ecuación del punto de operación y despreciamos términos de orden Δ^2 o superior:

$$\frac{d}{dt}(\Delta y(t)) + (3y_Q^2 - \alpha)\Delta y(t) = 2\,\Delta u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{2}{s + (3y_Q^2 - \alpha)}$$

El modelo linealizado es estable si y sólo si el punto de operación satisface $\boxed{3y_Q^2 - \alpha > 0}$

Problema 1.2 (10 puntos) *La figura muestra la respuesta de una planta cuando la entrada es un escalón unitario aplicado en $t = 0$, con condiciones iniciales iguales a cero.*



Proponga un modelo nominal $G_o(s)$ para dicho sistema que capture las características que se deducen de la respuesta a escalón.

Solución

Del gráfico se puede extraer información

i) Retardo $T_d = 0.5$

ii) Ganancia a continua $G(0) = 3$

iii) Constante de tiempo $4\tau \approx 6.5 - 0.5 \Rightarrow \tau \approx 1.5$

iv) Período de oscilación $T = 2 \Rightarrow \omega = \pi$

v) hay undershoot $\Rightarrow$ Existe un cero de fase no mínima ("inestable")

De iii) y iv) $\Rightarrow$ modos naturales: $e^{-t/1.5}\cos(\pi t + \phi)$

$\Rightarrow$ polos en $-\frac{1}{1.5} \pm j\pi = -0.67 \pm j\pi$

$$\Rightarrow D(s) = (s + 2/3 - j\pi)(s + 2/3 + j\pi)$$
$$= s^2 + 4/3\, s + 4/9 + \pi^2$$

En resumen

$$\Rightarrow G(s) = \frac{3\left(-\frac{s}{c} + 1\right)e^{-T_d s}}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\xi}{\omega_n}s + 1}$$

en que $T_d = 0.5$

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \pi^2}$$

$$\xi = \frac{\omega_n}{2} \cdot \frac{4}{3}$$

Problema 1.3 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1 se sabe que*

(a) existe ruido de medición de frecuencia en torno a $\omega \approx 8$[rad/s],

(b) la planta estrictamente propia y tiene un cero en $s = 1$, y

(c) existe una perturbación de salida en la banda $\omega < 2$[rad/s] aproximadamente.

Proponga una función de sensibilidad nominal complementaria $T_o(s)$ adecuada.

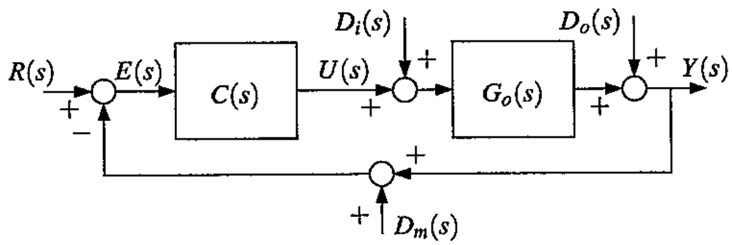


Figura 1: Lazo de control con un grado de libertad

Solución

De cada dato se puede extraer información

(a) $\Rightarrow$ Ancho de banda de T_o $<$ 8 $\left[\frac{rad}{s}\right]$

(b) $\Rightarrow$ T_o es estrictamente propia
y $T_o(1) = 0$ (pues, de otra forma, hay una cancelación inestable)

(c) $\Rightarrow$ Ancho de banda de T_o $>$ 2 $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Por tanto, se propone T_o que satisfaga las 4 características anteriores y tal que $T_o(0) = 1$.

Por ejemplo $$T_o(s) = \frac{-s+1}{\frac{s^2}{4^2} + 2 \cdot \frac{0.7}{4} s + 1}$$

(Note que ancho de banda de T_o se escogió en 4 $\left[\frac{rad}{s}\right]$)

Problema 1.4 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$C(s) = K_p \qquad G_o(s) = \frac{2}{s+1} \qquad r(t) = \mu(t) \qquad k_p \geqslant 0$$

y las condiciones iniciales son iguales a cero. Determine $u(t)$.

Solución

Calculamos la sensibilidad de control

$$S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1+G_o(s)C(s)} = \frac{k_p(s+1)}{s+1+2k_p}$$

$$\Rightarrow \quad U(s) = S_{uo}(s)\,R(s)$$

$$= \frac{k_p(s+1)}{s+1+2k_p} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k_p(s+1)}{s(s+\alpha)}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{\alpha}}{s} + \frac{\frac{-\alpha+1}{-\alpha}}{s+\alpha}\right) k_p \quad ; \alpha = 1+2k_p$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \frac{k_p}{\alpha}\left(1 + (\alpha-1)e^{-\alpha t}\right)\mu(t)$$

Problema 1.5 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$C(s) = \frac{K_I}{s} \qquad G_o(s) = \frac{1}{(s+1)(\tau s+1)} \qquad K_I \geqslant 0 \qquad \tau > 0$$

Determine la ganancia K_I tal que el lazo presente oscilaciones sostenidas.

Solución

Calculamos el polinomio de lazo cerrado

$$\begin{aligned} A_{cl}(s) &= A_o(s) L(s) + B_o(s) P(s) \\ &= (s+1)(\tau s+1) s + K_I \\ &= \tau s^3 + (\tau+1) s^2 + s + K_I \end{aligned}$$

Arreglo de Routh

s^3	τ	1
s^2	$\tau+1$	K_I
s	γ_{31}	0
1	K_I	

en que

$$\gamma_{31} = \frac{(\tau+1) - \tau K_I}{\tau+1}$$

Hay oscilaciones sostenidas cuando polos de lazo cerrado se ubican en el eje imaginario. Esto en el Routh ocurre cuando se hace cero una fila. Es decir, cuando

$$\gamma_{31} = 0 \iff (\tau+1) - \tau K_I = 0$$

$$\iff \boxed{K_I = \frac{\tau+1}{\tau}}$$

(De hecho, para ese valor de la ganancia $A_{cl}(s)$ tiene un factor de la forma $\left[(\tau+1)s^2 + K_I\right]$, es decir la frecuencia de oscilación es igual a

$$\omega_o^2 = \frac{K_I}{\tau+1} = \frac{1}{\tau}$$

$$\Rightarrow \omega_o = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$)

Problema 1.6 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

cuando $K_p \geq 0$

$$C(s) = K_p \quad ; \quad G_o(s) = \frac{e^{-T_d s}}{s(s+1)} \quad , T_d > 0$$

(i)

Compare los diagramas del Lugar Geométrico de Raíces (LGR) de los polos de lazo cerrado cuando el retardo se desprecia y cuando se reemplaza usando la aproximación

(ii)

$$e^{-x} \approx \frac{-x/2+1}{x/2+1}$$

Solución

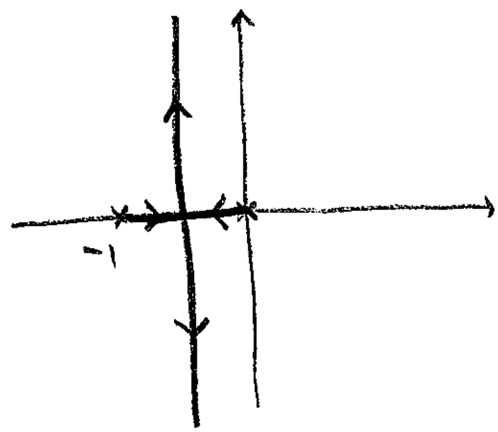
(i) Despreciando el retardo tenemos que el polinomio de lazo cerrado es $A_{cl1}(s) = s(s+1) + K_p$

$$G_{o1}(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$n_1 = 2$

$m_1 = 0$

2 asíntotas $\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{(-1+0)}{2-0} = -\dfrac{1}{2} \\ \eta_{1,k} = (2k-1)\dfrac{\pi}{2} < \begin{matrix} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{matrix} \end{cases}$



Note que el lazo es estable para todo valor de $K_p \geq 0$

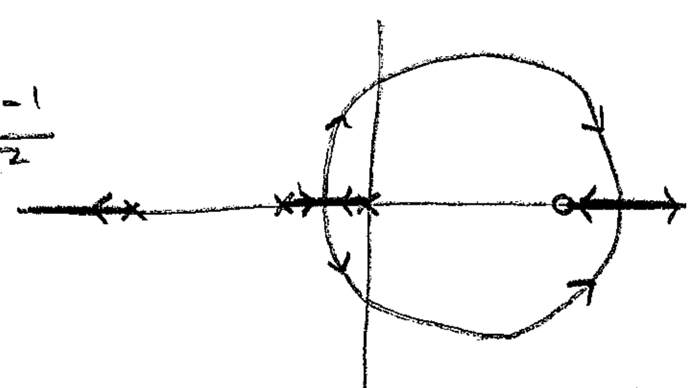
(ii) Al usar la aproximación de padé:

$$G_{o2}(s) = \frac{\left(-\frac{T_d}{2}s+1\right)}{\left(\frac{T_d}{2}s+1\right)s(s+1)} \Rightarrow A_{cl2}(s) = \left(\frac{T_d}{2}s+1\right)s(s+1) \underbrace{-K_p}_{\leq 0}\left(\frac{T_d}{2}s-1\right)$$

$n_2 = 3$

$m_2 = 1$

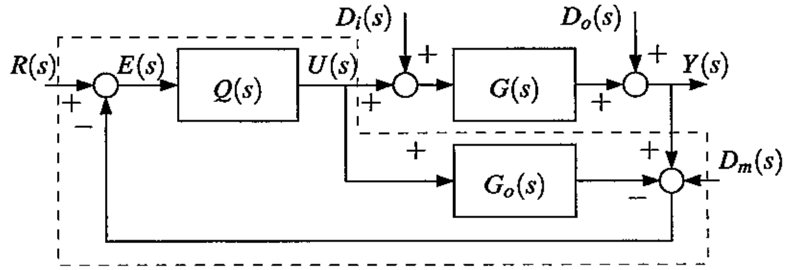
2 asíntotas $\begin{cases} \sigma_2 = \dfrac{\left(-\frac{2}{T_d}+0-1\right)-\left(\frac{2}{T_d}\right)}{3-1} = \dfrac{-\frac{4}{T_d}-1}{2} \\ \eta_{2,k} = 2k\dfrac{\pi}{2} < \begin{matrix} \pi \\ 2\pi \end{matrix} \end{cases}$



Pues la ganancia que se muestra es $-K_p \leq 0$

Note que el retardo puede INESTABILIZAR el lazo de control!!!

Problema 1.7 (10 puntos) *En el lazo de control de la figura, determine la función de tranferencia entre la perturbación de salida $d_o(t)$ y la salida $y(t)$.*



Controlador

Solución

El sistema es lineal ⇒ aplicamos superposición $R(s) = D_i(s) = D_m(s) =$

Por tanto,

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & Y = D_o + G\,U \\ 2) & U = Q\,E \\ 3) & E = -(-G_o U + Y) \end{array}\right\} \; U = -Q(-G_o U + Y)$$

$$\Downarrow$$

$$(1 - QG_o)\,U = -QY$$

$$\Downarrow$$

$$U = \frac{-Q}{1 - QG_o}\,Y$$

en 1) $$Y = D_o - \frac{GQ}{1 - QG_o}\,Y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1 - QG_o + QG}{1 - QG_o}\,Y = D_o$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{Y}{D_o} = \frac{1 - QG_o}{1 + Q(G - G_o)}}$$