

Certamen #2 – ELO270 – S2 2015

Soluciones

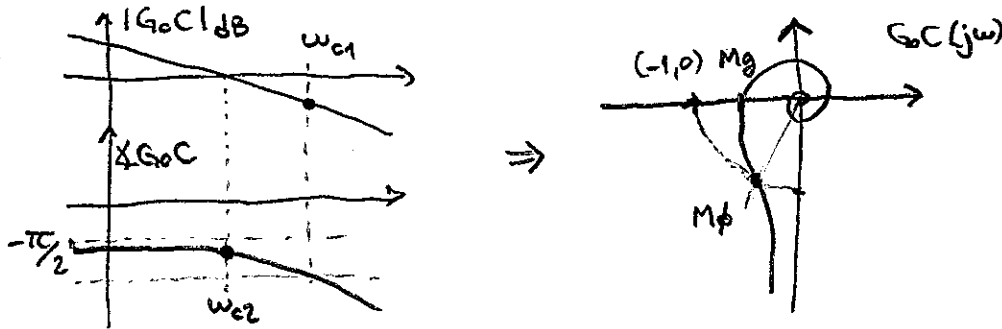
Problema 2.1 (10 puntos) En un lazo de control estándar con un grado de libertad, sin cancelaciones, la transferencia de lazo abierto es

$$G_o(s)C(s) = K \frac{e^{-sT_d}}{s}$$

en que $K > 0$. Determine para qué rango de valores de K y de T_d el lazo es internamente estable.

Solución

Haciendo un esquema del diagrama de Nyquist se aprecia que existe un rango de valores de K y T_d tal que no se encierra al punto $(-1, 0)$ y por tanto el lazo es internamente estable. De hecho, puede notarse que si $T_d = 0$, entonces el lazo es estable para todo $K > 0$. Sin embargo, si $T_d > 0$ entonces debe tomarse en cuenta los márgenes de ganancia y de fase.



- La ganancia crítica se obtiene a partir del margen de ganancia. Para obtenerlo, se determina la frecuencia a la cual la fase es $-\pi$, es decir,

$$\angle G_o C = -\omega T_d - \frac{\pi}{2} = -\pi \iff \omega_{c1} = \frac{\pi}{2T_d}$$

La ganancia a dicha frecuencia debe ser menor que uno

$$|G_o C|_{s=j\omega_{c1}} = \frac{K}{\omega_{c1}} = \frac{2KT_d}{\pi} < 1$$

Por tanto el lazo es internamente estable si $0 < K < \frac{\pi}{2T_d}$.

- Para determinar el retardo crítico, se calcula el margen de fase. Para obtenerlo, se determina la frecuencia a la que la magnitud es unitaria, es decir,

$$|G_o C| = \frac{K}{\omega} = 1 \iff \omega_{c2} = K$$

La fase a dicha frecuencia no debe alcanzar a ser $-\pi$, es decir,

$$(\angle G_o C)_{s=j\omega_{c2}} = -\omega_{c2} T_d - \frac{\pi}{2} > -\pi$$

Por tanto, el lazo es internamente estable si $T_d < \frac{\pi}{2K}$, que es la misma condición antes obtenida. Es decir, la condición es

$$KT_d < \frac{\pi}{2}$$

Problema 2.2 (10 puntos) En un lazo de control estándar con un grado de libertad

$$G(s) = \frac{\alpha s + 1}{(s+1)(s+2)}$$

en que el parámetro $-0,1 < \alpha < 0,1$ no se conoce exactamente. Se desea diseñar un controlador despreciando la presencia del cero, pero que garantice seguimiento perfecto en estado estacionario a referencias constantes. Indique como diseñaría dicho controlador para satisfacer la condición de desempeño robusto:

$$0,75|S_o(j\omega)| < |S(j\omega)| < 1,25|S_o(j\omega)|$$

Solución

La sensibilidad es
$$S = \frac{1}{1+GC} = \frac{1}{1+G_o C} \frac{1+G_o C}{1+G_o C + (G-G_o)C}$$
$$= S_o \cdot \frac{1}{1+T_o G_\Delta}$$

De donde se tiene las desigualdades

$$\frac{|S_o|}{1+|T_o||G_\Delta|} \leq |S| \leq \frac{|S_o|}{1-|T_o||G_\Delta|}$$

Para satisfacer la condición de desempeño robusto

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{1+|T_o||G_\Delta|} \Leftrightarrow |T_o||G_\Delta| < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1-|T_o||G_\Delta|} \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow |T_o||G_\Delta| < \frac{1}{5} \Leftrightarrow |T_o|_{dB} = -|G_\Delta|_{dB} - 14$$

El error de modelado es $G_\Delta(s) = \alpha s$

Haciendo el diagrama de Bode

Note que si $|\alpha| < 0,1$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\alpha|} > 10$$

Para garantizar los 14 dB adicionales y considerando

$\left(\frac{1}{|\alpha|}\right)_{\min} = 10$ basta elegir

el ancho de banda de T_o en torno a 1 rad/s.

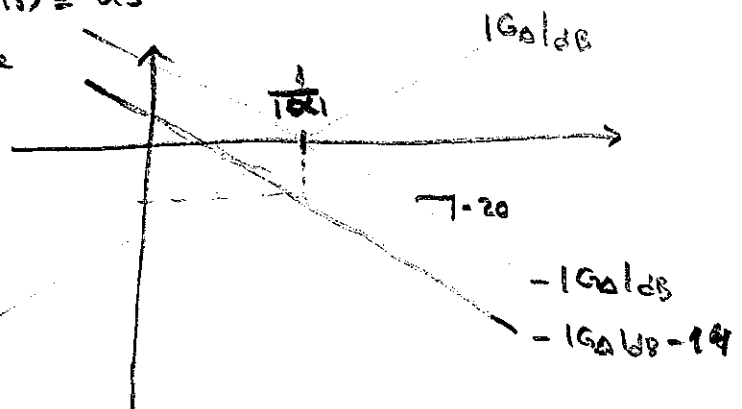
Aplicando arguación de polos: $m=2$ $r=1$ (integración) $\Rightarrow M_c=2$

$$A_o L + B_o P = A_c I$$

$$(s+1)(s+2)s(s+6) + (p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+2)(s+3)$$

Resolviendo se obtiene
$$C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+6)}$$

$$\omega_n = 1$$
$$\zeta \approx 0,7$$



Problema 2.3 (10 puntos) Suponga que se desea controlar, con un PI, una planta con modelo nominal

$$G_o(s) = \frac{32}{(s+2)^4}$$

¿Qué valores se obtendrían para los parámetros del controlador, si se usa el método de oscilación?

Nota: Las fórmulas de ajuste de Z-N por oscilación son $K_p = 0,45K_c$ y $T_r = P_c/1,2$

Solución

Debemos primer calcular el punto en que el diagrama polar o de Nyquist cruza el eje real negativo. Esto ocurre cuando la fase de $G_o(j\omega)$ es $-\pi$ [rad]. Entonces

$$-4 \arctan \frac{\omega_c}{2} = -\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_c = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \pi$$

A la frecuencia ω_c se cumple que

$$G_o(j\omega_c) = \frac{32}{(2\sqrt{2})^4} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto la ganancia crítica cumple con $K_c = 2$. Aplicando la expresiones de Z-N, se llega a

$$K_p = 0,45K_c = 0,9 \quad T_r = \frac{P_c}{1,2} = \frac{5\pi}{6} \approx 2,5$$

y el controlador PI tiene la expresión

$$C(s) = 0,9 \left(1 + \frac{1}{2,5s} \right)$$

Problema 2.4 (10 puntos) Considere un lazo de control estándar con un grado de libertad en que la planta tiene modelo nominal

$$G_o(s) = \frac{1}{s-1}$$

El controlador se diseña para compensar perfectamente en estado estacionario perturbaciones tipo escalón y que todos los polos de lazo cerrado se ubiquen en $s = -\alpha$. Si la perturbación de salida es un escalón unitario, determine la actuación inicial en $t = 0^+$.

Solución

↑
en que $\alpha > 0$

Diseño por asignación de polos $m=1$
 $r=1$ (integración)
 $\Rightarrow m_c = 1$

$$Ad = A_o L + B_o P \Rightarrow (s-1)s + p_1 s + p_0 = (s+\alpha)^2$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 + p_1 = 2\alpha \\ p_0 = \alpha^2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} = \frac{(2\alpha+1)s + \alpha^2}{s}$$

La actuación inicial es

$$u(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} (+s U(s)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(-s \frac{1}{s} S_{uo}(s) \right)$$

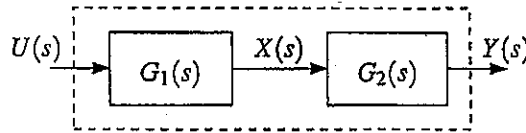
$$\text{en que } S_{uo}(s) = \frac{[(2\alpha+1)s + \alpha^2](s-1)}{(s+\alpha)^2} \quad \left(= \frac{C}{1+G_o C} \right)$$

$$\therefore u(0^+) = -(2\alpha+1)$$

Problema 4.5 (10 puntos) Considere la planta de la figura en que

$$G_1(s) = \frac{15}{s-5} \quad G_2(s) = \frac{-s+1}{s(s+3)}$$

Al medir $y(t)$ existe aparece ruido de medición en frecuencias superiores a $4[\text{rad/s}]$ y al medir $x(t)$, no aparece ruido apreciable. Diseñe un sistema de control adecuado en base a la información disponible, indicando claramente como obtendría cada bloque



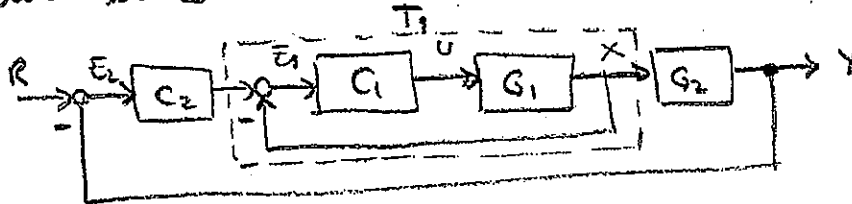
Solución

Requisitos/restricciones/criterios para el diseño:

- 1) Polo inestable en $s=5$ $\Rightarrow$ Ancho de banda $> 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (overshoot)
- 2) Cero de fase no mínima en $s=1$ $\Rightarrow$ Ancho de banda $< 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (undershoot)
- 3) Ruido de medición en $y(t)$ para $\omega > 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\Rightarrow$ Ancho de banda del lazo $< 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Note que 2) y 3) son contradictorias con 1)

Por tanto es conveniente usar control en cascada:



C_1 se diseña para ancho de banda $> 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ (note que NO es necesaria integración en $C_1(s)$)

$$\Rightarrow Acl_1 = A_{cl} L_1 + B_{cl} P_1$$

$$(s+8) = (s-5) + 15P_{cl}$$

pues $m=1$
 $r=0$ $\Rightarrow M_c=0$ (controlador proporcional)

$$\Rightarrow P_{cl} = \boxed{13/15 = C_1(s)}$$

C_2 se diseña para la planta equivalente $\tilde{G} = T_1 G_2 = \frac{13(-s+1)}{(s+8)s(s+3)}$ para obtener un ancho de banda $< 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

No es indispensable incluir integración en $C_2(s)$. (Note que la planta tiene integración y por tanto se compensan perturbaciones constantes, excepto las de entrada)

Por tanto para $\tilde{G}$: $m=3$ $\Rightarrow M_c=$
 $r=0$

$$C(s) = \frac{(s+8)(s+3)p_{cl}}{s^2 + l_{12}s + l_{cl}}$$

$$\Rightarrow Acl_2 = \tilde{A}_c L_2 + \tilde{B}_c P_2 \Leftrightarrow \frac{(s+8)(s+3)(s^2 + 23\omega_n s + \omega_n^2)(s+2)}{(s+8)s(s+3)(s^2 + l_{12}s + l_{cl})} \cdot \frac{13(-s+1)(s+8)(s+3)p_{cl}}{13(-s+1)(s+8)(s+3)p_{cl}}$$

en que $\omega_n = \frac{1}{2}$
solos dominantes $\Rightarrow \zeta \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$

Problema 2.6 (10 puntos) Considere la planta con modelo nominal

$$G_o(s) = \frac{1}{s-1}$$

Diseñe un controlador $C(s)$ y un bloque de prealimentación de la referencia $F(s)$ que garanticen que el lazo cerrado resultante sea internamente estable y que, cuando la referencia $r(t)$ es de tipo escalón, la salida $y(t)$ **no presente overshoot** y sea igual a la referencia en estado estacionario.

Solución

Note que si sólo se utiliza un controlador con integración (por ejemplo, un PI) estabilizante, pero sin usar el grado de libertad adicional dado por el bloque de prealimentación de la referencia (es decir, $F(s) = 1$), siempre existe *overshoot*. Si bien este se puede reducir eligiendo el ancho de banda más rápido que la magnitud del polo inestable, **no se puede eliminar**.

Para garantizar que no exista *overshoot* tenemos (al menos) dos alternativas

- (a) Diseñamos un controlador estabilizante y con integración

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \Rightarrow T_o(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s^2 + (p_1 - 1)s + p_0}$$

En que $p_1 > 1$ y $p_0 > 0$ garantizan un lazo estable y se pueden elegir para asignar arbitrariamente los polos de lazo cerrado.

El bloque de prealimentación $F(s)$ debe ser estable y propio. Se elige de tal forma de tener una función de transferencia de primer orden y ganancia a continua unitaria entre $R(s)$ e $Y(s)$:

$$T_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = F(s)T_o(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad ; 0 < \tau \Rightarrow F(s) = \frac{s^2 + (p_1 - 1)s + p_0}{(\tau s + 1)(p_1 s + p_0)}$$

- (b) El controlador puede ser proporcional y diseñado para tener un lazo estable:

$$C(s) = K_p \Rightarrow T_o(s) = \frac{K_p}{s + (K_p - 1)}$$

En que $K_p > 1$ garantiza un lazo estable y se puede elegir para asignar arbitrariamente el único polo de lazo cerrado.

El bloque de prealimentación $F(s)$ debe ser estable y propio. Puede elegirse para ajustar la ganancia a continua:

$$F(s) = \frac{1}{T_o(0)} = \frac{K_p - 1}{K_p} \Rightarrow \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p - 1}{s + (K_p - 1)}$$

o bien para tener una función de transferencia de primer orden y ganancia a continua unitaria entre $R(s)$ e $Y(s)$:

$$T_{yr}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = F(s)T_o(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \quad ; 0 < \tau \Rightarrow F(s) = \frac{s + (K_p - 1)}{K_p(\tau s + 1)}$$

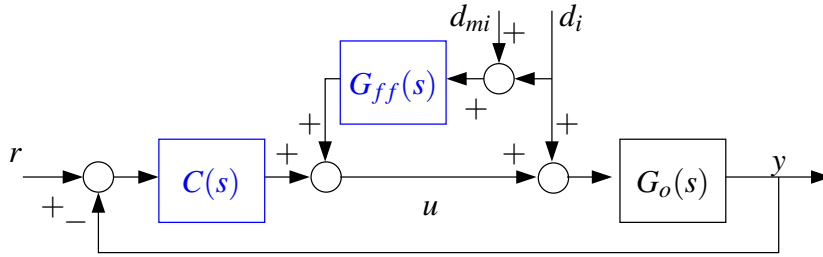
Problema 2.7 (10 puntos) Se desea diseñar un sistema de control para una planta

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1}$$

considerando que: la referencia a seguir es de tipo escalón, la salida de la planta se mide con ruido significativo para $\omega > 3[\text{rad/s}]$, y que existe una perturbación de entrada con energía en torno a $5[\text{rad/s}]$ y que se mide con ruido significativo sólo para $\omega > 10[\text{rad/s}]$. Determine un controlador $C(s)$ y un bloque de prealimentación de la perturbación $G_{ff}(s)$ que permitan satisfacer los requisitos de diseño.

Solución

El esquema de control con realimentación de la perturbación se muestra en la figura:



Los requisitos de diseño se traducen en:

- (a) Para que la planta siga referencias constantes, el controlador $C(s)$ debe tener integración, es decir, polo en el origen.
- (b) El ancho de banda del lazo cerrado debe ser **menor** que $3[\text{rad/s}]$
- (c) El ancho de banda del lazo cerrado debe ser **mayor** que $5[\text{rad/s}]$
- (d) El bloque de prealimentación debe tener un ancho de banda **menor** que $10[\text{rad/s}]$

Claramente, (b) y (c) no son compatibles, por tanto el lazo cerrado se diseña con ancho de banda **menor** que $3[\text{rad/s}]$ y la perturbación será compensada por el bloque de prealimentación.

La planta es de orden $n = 1$ por tanto basta un controlador bipropio con integración ($r = 1$ restricción) de orden $n_c = (n - 1) + r = 1$, es decir, un PI:

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

El polinomio de lazo cerrado es de orden $n_{cl} = (2n - 1) + r = 2$, y una posible elección está dada en la siguiente ecuación diofantina:

$$A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s) = A_{cl}(s)$$

$$(s+1)s + (p_1 s + p_0) = s^2 + (1 + p_1)s + p_0 = s^2 + 3s + 4$$

Donde se obtiene $p_0 = 4$, $p_1 = 2$ y, por tanto

$$C(s) = \frac{2s + 4}{s}$$

El bloque de prealimentación debe invertir el efecto de la perturbación de entrada, pero atenuar el ruido de su medición. Es decir, idealmente $G_{ff}(s) = -1$, sin embargo, $G_{ff}(s)$ debe tener ancho de banda mayor que $5[\text{rad/s}]$, pero **menor** que $10[\text{rad/s}]$. Un posible elección está dada por

$$G_{ff}(s) = \frac{-(s+80)}{10(s+8)}$$

Problema 2.8 (10 puntos) Considere un lazo de control estándar en que

$$G_o(s) = \frac{16}{s^2 + 4,8s + 16} \quad T_o(s) = \frac{\alpha^2}{s^2 + 1,3\alpha s + \alpha^2}$$

son, respectivamente, el modelo nominal de la planta y la función de sensibilidad nominal complementaria. Determine todos los polos del lazo cerrado.

Solución

Puede usarse Yendo

$$Q = \frac{T_o}{G_o} = \frac{s^2 + 4,8s + 16}{16} \cdot \frac{\alpha^2}{s^2 + 1,3\alpha s + \alpha^2}$$

Por tanto las funciones de sensibilidad son

$$T_o = \frac{\alpha^2}{s^2 + 1,3\alpha s + \alpha^2}$$

$$S_o = 1 - T_o = \frac{s^2 + 1,3\alpha s}{s^2 + 1,3\alpha s + \alpha^2}$$

$$S_{mo} = Q = \frac{\alpha^2 (s^2 + 4,8s + 16)}{16 (s^2 + 1,3\alpha s + \alpha^2)}$$

$$S_{\lambda o} = S_o G_o = \frac{(s^2 + 1,3\alpha s)}{(s^2 + 1,3\alpha s + \alpha^2)} \cdot \frac{16}{(s^2 + 4,8s + 16)}$$

Acl

Por tanto los polos de lazo cerrado son las 4 raíces de Acl

$$s_{1,2} = -0,65\alpha \pm j\alpha\sqrt{1-(0,65)^2}$$

$$s_{3,4} = -2,4 \pm j4\sqrt{1-(0,6)^2}$$