Solución

ELO270 – S2 2015 – Control #1 – 19 de octubre de 2015

Problema 1.1 *Un sistema lineal e invariante está descrito por la ecuación diferencial*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+4\sin y(t)=12u(t)$$

(a) *Determine el modelo linealizado del sistema en torno al punto de operación $(u_Q,y_Q)=(0,0)$*

Para dicho modelo linealizado…

(b) *Determine la función de transferencia, sus polos y sus ceros.*

(c) *Haga un gráfico lo más detallado posible y cualitativamente correcto de la respuesta a escalón.*

(d) *Determine el diagrama de Bode.*

(e) *Determine la respuesta estacionaria a una entrada $u(t)=\cos(\omega t)$.*

(a) Buscamos un modelo linealizado para $\Delta u(t) = u(t) - u_Q = u(t)$
$\Delta y(t) = y(t) - y_Q = y(t)$

Notamos que $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\Delta y}{dt}$; $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta y$; $\text{sen}(y(t))\Big|_{y_Q} \approx \underbrace{\text{sen}(y_Q)}_{0} + \underbrace{\cos(y_Q)}_{1}\Delta y$

$\Rightarrow$ Modelo linealizado es $\boxed{\frac{d^2}{dt^2}\Delta y + 2\frac{d}{dt}\Delta y + 4\,\Delta y = 12\,\Delta u}$

(b) Función transferencia: se aplica T. Laplace con c. i. cero

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{12}{s^2+2s+4} = G(s)$$

polos : $s^2+2s+4=0 \Rightarrow p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3}$

ceros : no tiene

(c) Los modos naturales son $\{e^{(-1\pm j\sqrt{3})t}\} = \{e^{-t}\cos(\sqrt{3}\,t);\ e^{-t}\,\text{sen}\,\sqrt{3}\,t\}$

la ganancia a continua es $G(0) = 3 = h(\infty)$: respuesta estacionaria a un escalón unitario

también se puede calcular la pendiente de $h(t)$ en $t=0^+$:

$$\frac{dh}{dt}(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\left[s\left(\frac{G(s)}{s}\right)\right] = \lim_{s\to\infty}\frac{12s}{s^2+2s+4} = 0$$

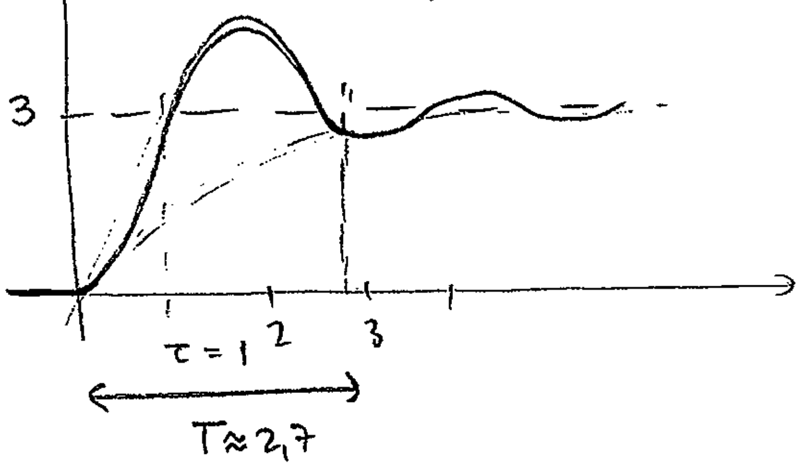
$$h(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\left[\underbrace{\frac{G(s)}{s}}_{H(s)}\right] = 0$$

[illegible] 2015

$H(s)$: T. de Laplace de la respuesta escalón

Por tanto, la respuesta a escalón unitario es

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$$



$\tau = 1$

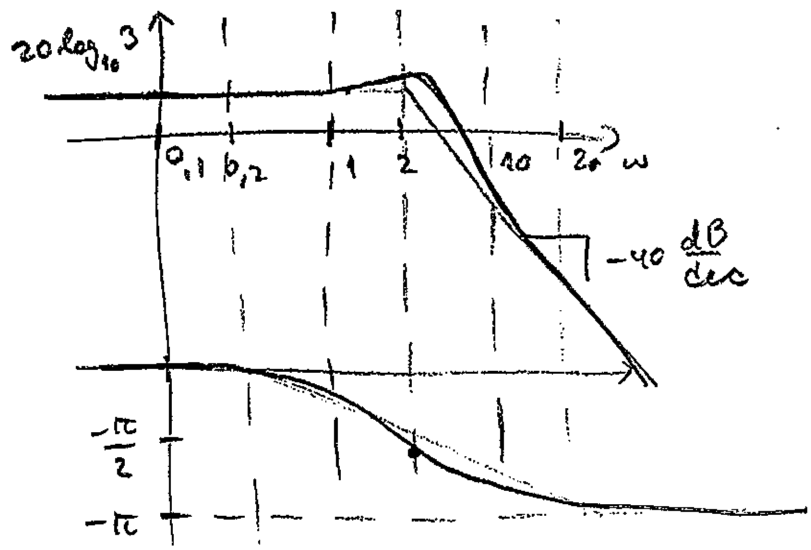
$T = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \approx 2{,}7$

(d) Forma de Bode:

$$G(j\omega) = \frac{3}{\left(\frac{j\omega}{2}\right)^2 + \frac{j\omega}{2} + 1}$$

$\omega_n = 2$ $\quad 2\xi = 1$

$\Rightarrow \xi = 1/2$



(e) Si $u(t) = \cos(\omega t)$ para obtener la respuesta estacionaria basta evaluar $G(s)$ en $s = j\omega$

$$\Rightarrow \quad y(t) = |G(j\omega)| \cos(\omega t + \measuredangle G(j\omega))$$

$$G(j\omega) = \frac{12}{-\omega^2 + 2j\omega + 4} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(4-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\measuredangle G(j\omega) = \begin{cases} -\operatorname{Arctg}\left(\frac{2\omega}{4-\omega^2}\right) & \omega < 2 \\ -\pi + \operatorname{Arctg}\left(\frac{2\omega}{\omega^2 - 4}\right) & \omega > 2 \end{cases}$$