

Solución

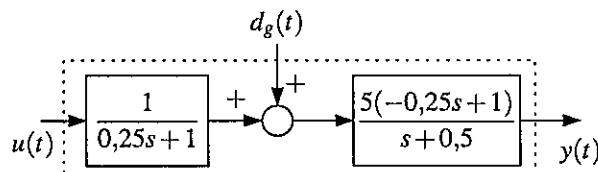
ELO270 – S2 2015 – Control #3 – 18 de noviembre de 2015

Problema 3.1 Un proceso tiene un modelo representado en diagramas de bloques en la figura. Se sabe que la perturbación $d_g(t)$ tiene energía concentrada en torno a 2 [rad/s] pero no es medible y que la señal de referencia es positiva y de tipo escalón unitario.

El sistema se controla en un lazo (cerrado) de control estándar con un grado de libertad, en que el controlador se elige como un PI:

$$C(s) = \frac{K(s+\alpha)}{s}$$

- (a) Si $K = 0,1$ y $\alpha = 4$ determine los polos de lazo cerrado ¿Es el lazo internamente estable?
- (b) En general, determine qué condiciones debe satisfacer K y α para que el lazo sea internamente estable.
- (c) En base a la información disponible ¿qué valores elegiría para K y α para tener un buen sistema de control?
- (d) Para su elección en el punto anterior, determine si la perturbación $d_g(t)$ es atenuada o amplificada. *en la salida $y(t)$*



(a) Si $K=0.1$ y $\alpha=4$ el controlador es $C(s) = \frac{0.1(s+4)}{s}$

El polinomio de lazo cerrado es

$$A_d(s) = A_c(s)L(s) + B_c(s)P(s)$$

$$= (0.25s+1)(s+0.5)s + 5(-0.25s+1)0.1(s+4)$$

$$\Rightarrow 4 \cdot A_d(s) = (s+4) [s^2 + 0.5s + 0.5(-s+4)]$$

$$= (s+4) (s^2 + 2)$$

los polos de lazo cerrado son $-4, \pm j\sqrt{2}$

El lazo NO es internamente estable pues hay polos en el eje imaginario.

(b) El polinomio de lazo cerrado es

$$A_d(s) = (0.25s+1)(s+0.5)s + 5(-0.25s+1)K(s+\alpha)$$

$$\Rightarrow 4 A_d(s) = (s+4)(s^2+0.5s) + 5(-s+4)(Ks+K\alpha)$$

$$= s^3 + s^2(4+0.5-5K) + s(2+20K-5K\alpha) + 20K\alpha$$

Analizaremos mediante ROUTH

Hay de todas formas 3 condiciones necesarias

~~18 de noviembre de 2015~~

$$\begin{aligned} 4.5 - 5K &> 0 \\ 2 + 20K - 5K\alpha &> 0 \\ K\alpha &> 0 \end{aligned}$$

$$\text{Routh: } \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 + 20k - 5k\alpha \\ s^2 & 4.5 - 5k & 20k\alpha \\ s & \gamma_{31} & 0 \\ 1 & 20k\alpha & \end{array}$$

$$\text{en que } \gamma_{31} = \frac{(4.5 - 5k)(2 + 20k - 5k\alpha) - 20k\alpha}{4.5 - 5k}$$

Para que el lazo sea internamente estable no debe haber cambios de signo en la primera columna. Por tanto, las condiciones son

$$4.5 - 5k > 0 \Rightarrow k < 0.9$$

$$\gamma_{31} > 0 \Rightarrow (4.5 - 5k)(2 + 20k - 5k\alpha) - 20k\alpha > 0$$

(que se puede o no seguir simplificando)

$$20k\alpha > 0 \Rightarrow k\alpha > 0$$

(c) Se sabe que

(i) Perturbación con energía en torno a $2 \text{ [rad/s]} \Rightarrow$ Ancho de banda del lazo de control debe ser mayor que 2 [rad/s]

(ii) Referencia tipo escalón $\Rightarrow$ Seguimiento perfecto a continua, lo cual se garantiza por el controlador con integración.

~~Por tanto, no se puede garantizar el seguimiento perfecto a continua.~~

No es claro como satisfacen (i), por tanto basta elegir (k, α) tal que el lazo sea al menos estable.

Por ejemplo si $\boxed{k = 0.5} \Rightarrow \gamma_{31} = 2(12 - 2.5\alpha) - 10\alpha > 0$
 $24 - 15\alpha > 0$
 $\alpha < 1.6$

(d) Calculamos $\frac{Y}{D_g} = \frac{s(0.25s+1)5(-0.25s+1)}{Acl(s)}$

por ejemplo $\boxed{\alpha = 1}$

en que $Acl(s) = \frac{1}{4}(s^3 + 2s^2 + 9.5s + 10)$ cuando $\begin{cases} k=0.5 \\ \alpha=1 \end{cases}$

Lo importante es obtener $\left| \frac{Y}{D_g} \right|_{s=j2} = \left| \frac{4 \cdot j2(0.5j+1)5(-0.5j+1)}{-8j - 8 + 19j + 10} \right|$
 $= \frac{50}{\sqrt{2^2 + 11^2}} > 1$ ¡se amplifica!
 $= 2\sqrt{5}$