Solución

ELO270 – S2 2015 – Control #5 – 23 de diciembre de 2015

Problema 5.1 (10 puntos) *Considere una planta descrita por la función transferencia*

$$G(s) = \frac{b_o}{(s+a_o)^3} \qquad ; a_o > 0, b_o > 0$$

(a) Si se aplica el método de oscilación de Ziegler&Nichols, determine la ganancia crítica K_c y el período P_c de la oscilación que se obtendría.

(b) Verifique que el lazo de controlador obtenido usando un controlador PI sintonizado mediante el método de oscilación de Ziegler y Nichols ($K_p = 0{,}45K_c$, $T_i = P_c/1{,}2$) es internamente estable.

(a) Para determinar el período de oscilación sostenida puede usarse, por ejemplo, el arreglo de Routh

$$G(s) = \frac{b_o}{(s+a_o)^3} \qquad C(s) = K_p \quad \Rightarrow \quad A_{cl}(s) = (s+a_o)^3 + b_o K_p$$
$$= s^3 + 3a_o s^2 + 3a_o^2 s + (a_o^3 + b_o K_p)$$

Arreglo de Routh:

s^3	1	$3a_o^2$
s^2	$3a_o$	$a_o^3 + b_o K_p$
s	γ_{31}	0
1	$a_o^3 + b_o K_p$	

Hay oscilación sostenida (polos de lazo cerrado imaginarios) cuando

$$\gamma_{31} = 0$$
$$\gamma_{31} = \frac{9a_o^3 - a_o^3 - b_o K_p}{3a_o} = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{K_p = \frac{8a_o^3}{b_o} = K_c} \quad \text{ganancia crítica}$$

La frecuencia y período de oscilación se obtiene reemplazando en la segunda fila del arreglo de Routh que indica que el A_{cl} es divisible por:

$$\left(3a_o s^2 + a_o^3 + b_o\left(\frac{8a_o^3}{b_o}\right)\right) = 3a_o\left(s^2 + 3a_o^2\right)$$

$$\Rightarrow \omega_c = \sqrt{3}a_o \quad \Rightarrow \quad P_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a_o}$$

(b) El controlador PI sintonizado por Z&N es de la forma

$$C_{PI}(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right) = 3,6\,\frac{a_0^3}{b_0}\left(1+\frac{\overset{0.6}{\cancel{1,2}}\sqrt{3}\,a_0}{\cancel{2}\pi}\,\frac{1}{s}\right)$$

El polinomio de lazo cerrado resultante es

$$\begin{aligned}
A_{cl}(s) &= A_0(s)\,L(s) + B_0(s)\,P(s)\\
&= (s+a_0)^3\,s + \cancel{b_0}\,\frac{3,6a_0^3}{\cancel{b_0}}\left(s+\frac{0.6\sqrt{3}\,a_0}{\pi}\right)\\
&= s^4 + 3a_0 s^3 + 3a_0^2 s^2 + 4,6a_0^3 s + \frac{2,16\sqrt{3}\,a_0^4}{\pi}
\end{aligned}$$

usando Routh nuevamente

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3a_0^2 & \frac{2,16\sqrt{3}\,a_0^4}{\pi}\\
s^3 & 3a_0 & 4,6a_0^3 & 0\\
s^2 & \frac{4,4a_0^2}{3} & \frac{2,16\sqrt{3}\,a_0^4}{\pi} & 0\\
s & \gamma_{41} & 0 & \\
1 & \frac{2,16\sqrt{3}\,a_0^4}{\pi} & &
\end{array}$$

en que
$$\begin{aligned}
\gamma_{41} &= 4,6a_0^3 - \frac{3\cdot 2,16\sqrt{3}\,a_0^{\overset{3}{\cancel{4}}}}{\pi}\cdot\frac{3}{4,4\cancel{a_0^2}}\\
&= a_0^3\left(4,6 - \frac{19,44\sqrt{3}}{4,4\pi}\right)\\
&\approx a_0^3\left(4,6 - \frac{20\cdot 1,7}{4,5\cdot 3}\right) = a_0^3\left(4,6 - \frac{34}{12,5}\right) > 0 \;//
\end{aligned}$$

Por tanto el lazo es internamente estable.

Solución

Problema 5.2 (10 puntos) *Considere una planta con función de transferencia*

$$G_o(s) = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

Se sabe que existen perturbaciones de entrada en la banda de 3 a 5 [rad/s] y que el error de modelado es no despreciable para $\omega > 10$[rad/s] Determine un controlador PID usando la información disponible.

Si existen perturbaciones de entrada para $\omega \in [3, 5]$

$\Rightarrow$ ancho de banda del lazo $> 5 \ \frac{rad}{s}$

Si el error de modelado es no-despreciable para $\omega > 10$

$\Rightarrow$ ancho de banda del lazo $< 10 \ \frac{rad}{s}$

Note que ambos requisitos son compatibles de satisfacer simultáneamente.

Un PID tiene la estructura

$$C_{PID}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_D s}{\tau_D s + 1}\right) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+l_0)}$$

El orden de la planta es $n = 2$ y $r = 1$ pues el PID tiene integración

por tanto $n_c = n - 1 + r = 2$ es exactamente el orden del PID

y los polos de lazo cerrado pueden ser ASIGNADOS ARBITRARIAMENTE

La ecuación diofantina es

$$A_{cl}(s) = A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)$$

$$(s^2 + \overbrace{2\cdot 0.75\cdot 8}^{12} s + 8^2)(s^2 + 14s + 100) = (s+2)(s+3)(s)(s+l_0) + 6(p_2 s^2 + p_1 s + p_0)$$

$$= (s^2 + 5s + 6)(s^2 + l_0 s) + 6(p_2 s^2 + p_1 s + p_0)$$

$$s^4 + 26 s^3 + (64 + 100 + 12\cdot 14)s^2 + (1200 + 64\cdot 14)s + 6400$$

$$s^4 + 26s^3 + 332s^2 + 896s + 6400 = s^4 + (5 + l_0)s^3 + (6 + 5l_0 + 6p_2)s^2 + (6l_0 + 6p_1)s + 6p_0$$

$\Rightarrow l_0 = 21 \qquad p_2 = \frac{332 - 6 - 105}{6} = \frac{121}{6} \approx 20$

$p_0 \approx 1067 \qquad p_1 = \frac{896 - 126}{6} = \frac{770}{6} \approx 128$

//