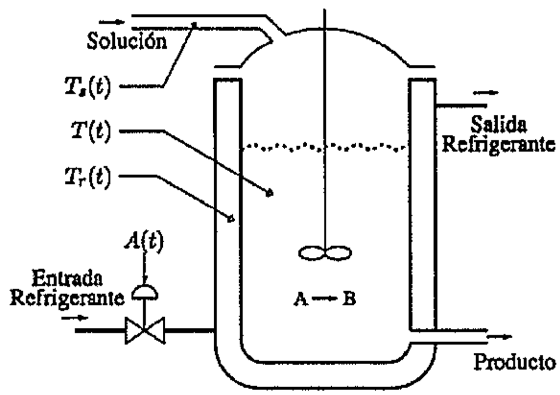
Certamen #1 – ELO270 – S2 2016

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *En el tanque de la figura se hace reaccionar A para obtener B con un agitador. La reacción genera calor, por lo cual interesa mantener controlada su temperatura $T(t)$, manipulando la apertura $A(t)$ de una válvula que determina el flujo de refrigerante a las paredes del tanque. $T_s(t)$ es la temperatura de la solución que ingresa al tanque. $T_r(t)$ es la temperatura del refrigerante en las paredes del tanque.*

Haga un diagrama de bloques que determine la dependencia de las señales del sistema, identificando actuación, perturbaciones, salidas medibles y no medibles, u otras.



Solución

De acuerdo a lo que se indica

actuación : $A(t)$ apertura de la válvula

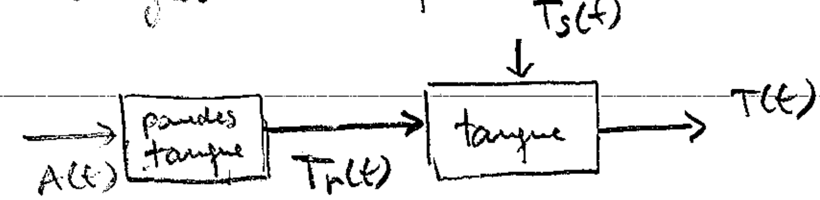
salida : $T(t)$ temperatura en el tanque
se supone medible

otras salidas (o estados) : $T_r(t)$ podría ser medible o no

perturbaciones : $T_s(t)$ es una entrada externa que, hasta donde se indica, no puede manipularse

Además, podrían considerarse : - caudal de entrada y salida,
- volumen de reacción en el estanque
- etc...

Posible diagrama de bloques :



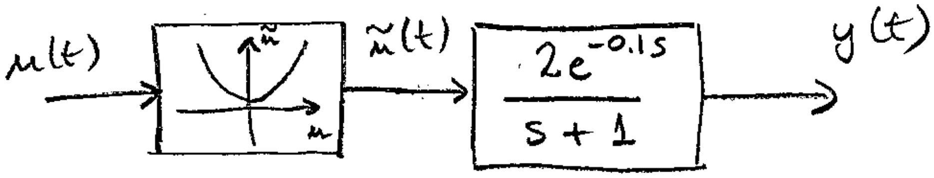
Problema 1.2 (10 puntos) *Una planta está descrita por el modelo*

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2(u(t-0{,}1))^2$$

Proponga un esquema de control en lazo abierto que permita seguimiento perfecto en estado estacionario a señales de referencia tipo escalón y positivas.

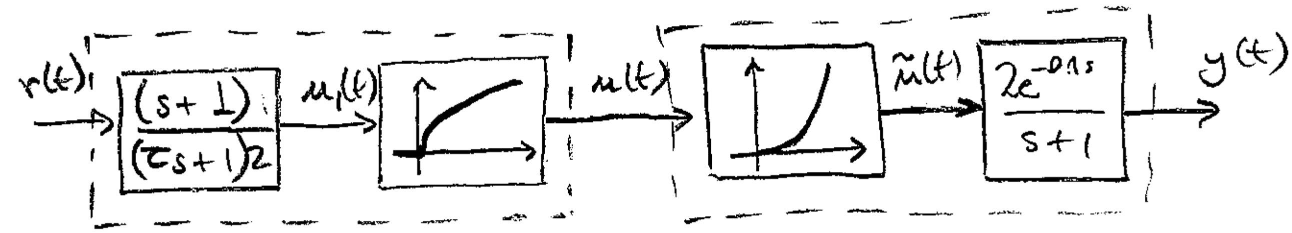
Solución

Note que la entrada del sistema está al cuadrado y retardada, pero el "lado izquierdo" es LINEAL e invariante en el tiempo



- Dado que las referencia es constante y positiva y que ganancia a continua de la planta es positiva $\Rightarrow$ se puede invertir la no linealidad para $u(t) > 0$ y $\tilde{u}(t) > 0$
- El retardo NO se puede invertir
- Se puede invertir aproximadamente la dinámica lineal

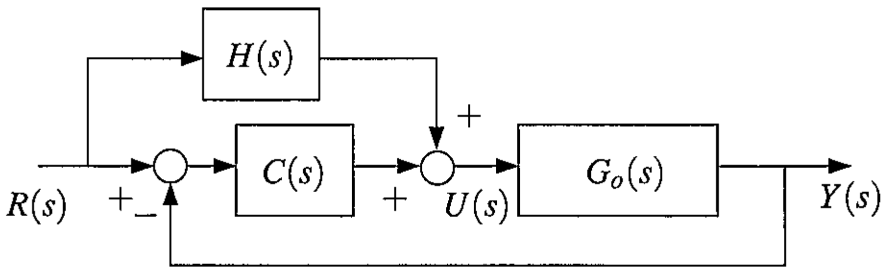
$\Rightarrow$



con que $0 < \tau << 1$ y $u(t) = \sqrt{u_1(t)}$

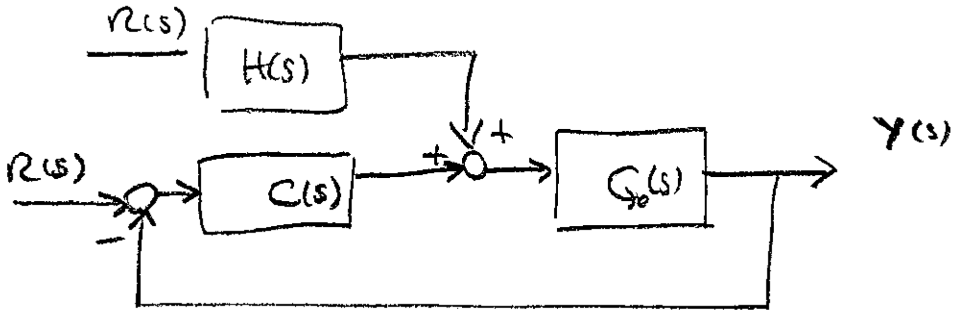
Note que $\boxed{\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{e^{-0.1s}}{\tau s+1}}$ (mientras $r(t)$ y $u_1(t)$ se mantengan positivas)

Problema 1.3 (10 puntos) *En el esquema de control de la figura, determine la función transferencia entre la referencia $r(t)$ y la salida $y(t)$.*



Solución

Por algebra de Bloques



$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{H(s)\, G_o(s)}{1 + G_o(s) C(s)} R(s) + \frac{G_o(s)\, C(s)}{1 + G_o(s) C(s)} R(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_o(s) \left(H(s) + C(s) \right)}{1 + G_o(s)\, C(s)}$$

Problema 1.4 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1, considere una planta con modelo nominal* $G_o(s) = \dfrac{1}{s^2+s+1}$. *Determine si es posible estabilizarla con un controlador de tipo PI, es decir,* $C(s) = K_P + \dfrac{K_I}{s} = \dfrac{K(s+\alpha)}{s}$

Solución

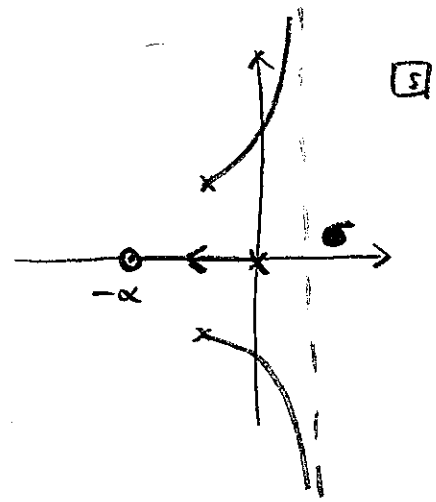
Puede analizarse por...

a) LGR

polos de G_o: $s^2+s+1=0$

$$\Updownarrow$$

$$s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$-\alpha$ debe ser negativo, pues de otra forma hay una raíz real positiva $\Rightarrow$ $\alpha > 0$

$$\sigma = \frac{\Sigma p - \Sigma c}{\#p - \#c} = \frac{-1+\alpha}{3-1} = \frac{\alpha - 1}{2}$$

$$\eta_k = \frac{(2k+1)\pi}{\#p - \#c} = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ para que las otras dos raíces siempre sean estables basta que $\alpha - 1 < 0$

$\Rightarrow$ $\alpha < 1$

Si no se cumple esta condición, de todas formas hay un rango de valores de K para el que el lazo es ESTABLE

b) ROUTH

$$A_{cl}(s) = (s^2+s+1)s + K(s+\alpha)$$
$$= s^3 + s^2 + (K+1)s + \alpha K$$

$\Rightarrow$

s^3	1	$K+1$	0
s^2	1	αK	0
s	$K+1-\alpha K$	0	
1	αK		

Condiciones

i) $K+1-\alpha K > 0$

$K > \dfrac{1}{\alpha - 1}$ $\quad (\alpha < 1)$

ii) $\alpha K > 0$

$\Rightarrow$ si $0 < \alpha < 1$ $\Rightarrow$ el lazo es estable para todo $K > 0$

En Resumen, sí es posible encontrar un PI estabilizante.

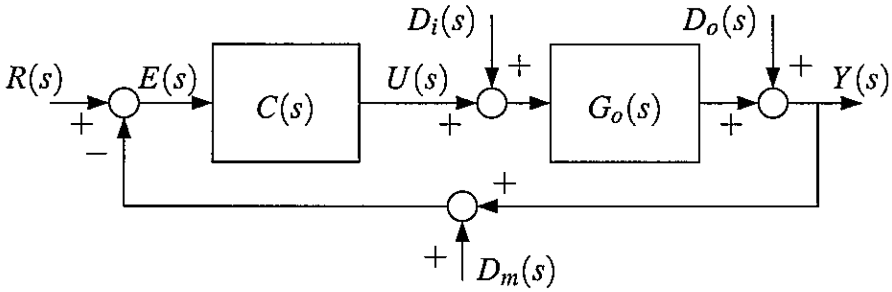


Figura 1: Lazo de control con un grado de libertad

Problema 1.5 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1} \qquad T_o(s) = \frac{s+2}{s^2+s+6}$$

Determine si se satisfacen los siguientes requisitos de diseño

(a) Lazo internamente estable,

(b) Rechazo perfecto en estado estacionario a perturbaciones de tipo escalón, y

(c) Seguimiento perfecto en estado estacionario a referencias sinusoidales de frecuencia 2 rad/s.

Solución

(a) Planta estable y sin ceros "inestables" o de fase no mínima $\Rightarrow$ No hay cancelaciones inestables. Por tanto $T_o(s)$ estable $\Rightarrow$ Lazo internamente estable

(b) $T_o(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow S_o(0) = \frac{2}{3}$ por tanto NO se compensan perfectamente en estado estacionario perturbaciones de tipo escalón

(c) $T_o(\pm j2) = \dfrac{\pm j2+2}{-4 \pm j2 + 6} = 1$ por tanto hay seguimiento perfecto en e.e. a referencias de frecuencia 2 rad/s

Problema 1.6 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,* no hay cancelaciones entre planta y controlador, y

$$G_o(s)C(s) = \frac{2(s+2)}{s^2+4\xi s+4}$$

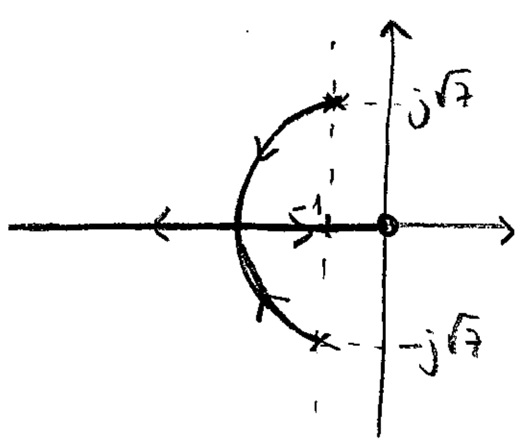
Determine el Lugar Geométrico de Raíces (LGR) del polinomio de lazo cerrado cuando $0 \le \xi \le 1$.

Solución

$$A_{cl}(s) = \text{num}\{1 + G_oC\} \quad \text{(pues no hay cancelaciones)}$$

$$= s^2 + 4\xi s + 4 + 2s + 4$$

$$= \underbrace{(s^2+2s+8)}_{\text{"polos" en } s=-1\pm j\sqrt{7}} + \underbrace{\xi}_{\lambda} \underbrace{4s}_{\text{"cero" en } s=0}$$



2 raíces

inicio en $-1\pm j\sqrt{7}$ $(\xi=0)$

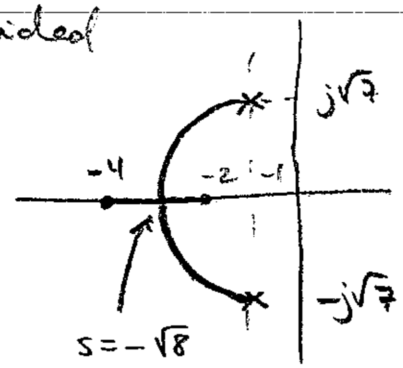
LGR en el eje real negativo

final en $s=0$ y $s=-\infty$ $(\xi\to+\infty)$

En particular cuando $\xi = 1$

$$A_{cl}(s) = s^2+6s+8 = (s+2)(s+4)$$

es decir el LGR es en realidad



cuando $\xi = \frac{\sqrt{8}-1}{2}$

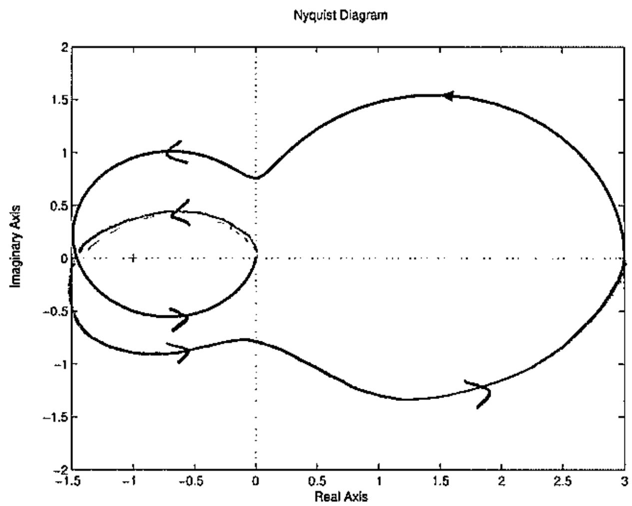
Además

$$s^2+(2+4\xi)s+8 = (s+\sqrt{8})^2$$

$$2+4\xi = 2\sqrt{8}$$

$$\xi = \tfrac{1}{2}(\sqrt{8}-1)$$

Problema 1.7 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Nyquist de una transferencia de lazo abierto para frecuencias positivas. Dicha transferencia es* ***inestable*** *y no existen cancelaciones entre planta y controlador. Determine si el lazo cerrado es o no internamente estable.*



$GC|_{\omega=0} = 3$

Solución

Completando el diagrama de Nyquist para frecuencias negativas se aprecia que el punto $(-1,0)$ es encerrado $N = -2$ veces en sentido horario

Por su parte se dice que GoC es inestable pero NO se indica cuantos polos inestables existen $\Rightarrow P > 0$

El criterio de Nyquist establece que

$$N = Z - P \iff Z = N + P$$

en que Z es el número de polos de lazo cerrado inestable

Por tanto si $P = 2 \Rightarrow Z = 0$ lazo estable

Pero <u>NO</u> se puede garantizar en base a la información proporcionada.