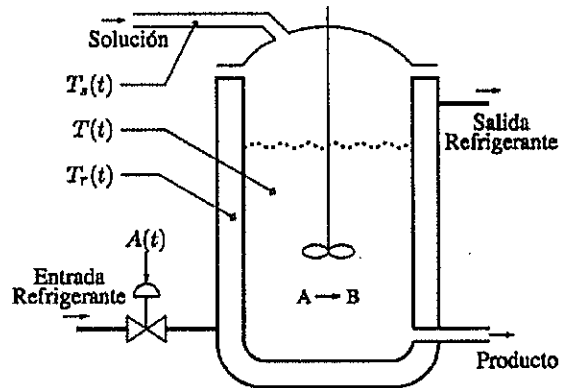


Certamen #2 – ELO270 – S2 2016

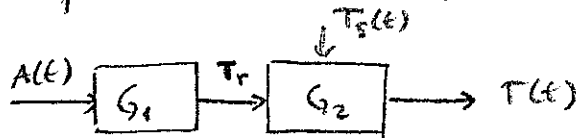
Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) En el tanque de la figura se hace reaccionar A para obtener B con un agitador. La reacción genera calor, por lo cual interesa mantener controlada su temperatura $T(t)$, manipulando la apertura $A(t)$ de una válvula que determina el flujo de refrigerante a las paredes del tanque. $T_s(t)$ es la temperatura de la solución que ingresa al tanque. $T_r(t)$ es la temperatura del refrigerante en las paredes del tanque. Discuta qué arquitecturas de control se podrían utilizar.



Solución

El modelo esquemático del estanco es



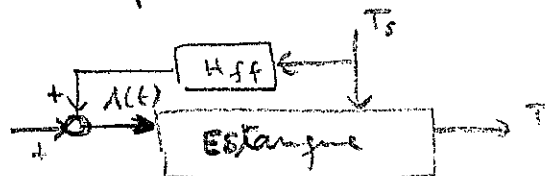
$A(t)$: actuación disponible

$T(t)$: temperatura a controlar

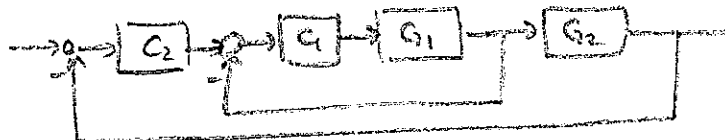
$T_r(t)$: variable interna (que podría o no medirse)

$T_s(t)$: perturbación (que podría o no medirse)

i) Si se mide $T_s(t)$ podría hacerse prealimentación de perturbación:



ii) Si se mide $T_r(t)$ podría hacerse control en cascada



(Esto además del control usual en un esquema de un grado de libertad)

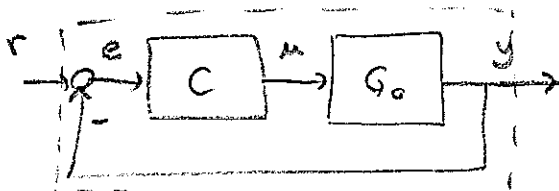
(También es posible aplicar i) y ii) simultáneamente)

Problema 2.2 (10 puntos) En un lazo de control de un grado de libertad, el controlador y la planta están dados por los siguientes modelos de estado:

$$G_o \begin{cases} \dot{x}(t) = -2x(t) + u(t) \\ y(t) = 3x(t) \end{cases} \quad C \begin{cases} \dot{x}_c(t) = u_c(t) \\ y_c(t) = 2x_c(t) + u_c(t) \end{cases}$$

Determine si el lazo cerrado es completamente controlable y/o completamente observable.

Solución



Las ecuaciones de la interconexión son

$$u = y_c$$

$$u_c = e = r - y$$

Por tanto el modelo de estado del lazo cerrado es

$$\text{estados} \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + y_c = -2x + 2x_c + (r - y) = -2x + 2x_c + (r - 3x) \\ \dot{x}_c = u_c = r - y = -3x + r \end{cases}$$

$$\text{salida} \quad y = 3x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz de controlabilidad: } W_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |W_c| = 0$$

NO es completamente controlable

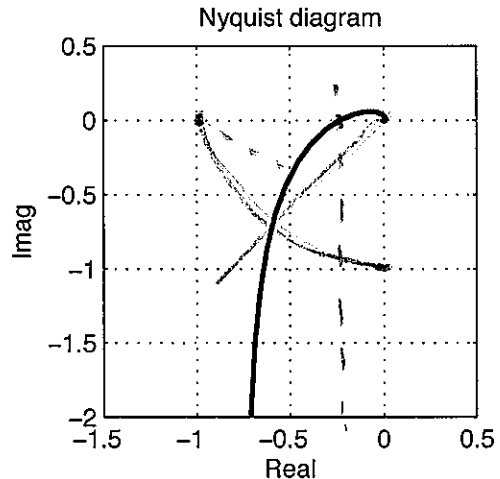
$$\text{Matriz de observabilidad: } W_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |W_o| \neq 0$ si es completamente observable

(También puede hacerse usando funciones transferencias:

$$\left. \begin{aligned} G_o &= 3 \frac{1}{s+2} \neq 0 = \frac{3}{s+2} \\ C &= 2 \frac{1}{s} \neq 1 = \frac{s+2}{s} \end{aligned} \right\} T_o = \frac{3}{s+3} \Rightarrow \text{hay cancelación} \Rightarrow \text{hay un modo } (e^{-2t}) \text{ que es NO controlable o NO observable}$$

Problema 2.3 (10 puntos) En la figura se muestra el diagrama de Nyquist de una transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$, con integración y estrictamente propia. Determine aproximadamente el margen de ganancia, el margen de fase, y un diagrama de $|S_o(j\omega)|$ en función de ω .



Solución

i) Se aprecia que el Nyquist corta al eje real negativo aproximadamente en $-0.25 = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow M_g = -20 \log_{10} \left(\frac{1}{4} \right) \approx 40 \cdot 0.3 = 12 \text{ [dB]}$$

ii) Se aprecia que el módulo del Nyquist es 1 para un ángulo de aproximadamente $-135^\circ = -\frac{3\pi}{4}$

$$\Rightarrow M_\phi = \frac{\pi}{4}$$

iii) Recordemos que $|S_o| = \left| \frac{1}{1+G_o C} \right|$

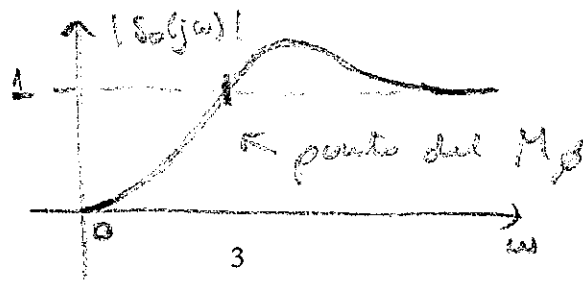
Hay tres puntos que pueden estimarse del gráfico

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |G_o C| \rightarrow \infty \Rightarrow |S_o| \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G_o C| \rightarrow 0 \Rightarrow |S_o| \rightarrow 1$$

$$\text{Mínima distancia de } G_o C(j\omega) \text{ al } (-1,0) \approx \frac{2}{3} \Rightarrow \max \left| \frac{1}{1+G_o C} \right| \approx \frac{3}{2}$$

Por tanto



Problema 2.4 (10 puntos) Considere una planta con modelo nominal

$$G_o(s) = \frac{e^{-0.2s}}{s-1}$$

Determine un controlador estabilizante que garantice rechazo a perturbaciones en la banda de 0 a 6 [rad/s], indicando claramente cómo toma en cuenta los requisitos de diseño y la información disponible.

Solución

- Rechazo a perturbaciones para $\omega \in [0, 6] \Rightarrow B_w(Acl) > 6$
- Polo inestable en $s=1 \Rightarrow B_w(Acl) > 1$ para reducir overshoot
- Retardo: - Si se desprecia $\Rightarrow B_w(Acl) < \frac{1}{0.2} = 5$ para garantizar $|T_o G_o| < 1$
 - Si se usa Pade' de primer orden
 $\Rightarrow B_w(Acl) < \frac{3}{0.2} = 15$ para garantizar $|T_o G_o| < 1$
 - No se puede usar predicción de Smith (G_o inestable)

Por tanto, se utiliza aproximación de polos para la planta

$$\tilde{G}_o(s) = \frac{1-s\frac{T_d}{2}}{1+s\frac{T_d}{2}} \frac{1}{s-1} = \frac{s-10}{(s+10)(s-1)} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} M=2 \\ r=1 \text{ (integración en } C) \end{matrix}$$

y elegimos un controlador tal que $6 < B_w(Acl) < 15$

$$Acl = A_o L + B_o P$$

$$(s+10)^2 (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = (s+10)(s-1) s (s+p_0) + (s-10) (p_2 s^2 + p_1 s + p_0)$$

↑
fuerte cancelación estable

$$\begin{matrix} \omega_n = 8 \\ \zeta = 0.75 \end{matrix}$$

$$C(s) = \frac{(s+10)(\tilde{p}_1 s + \tilde{p}_0)}{s(s+p_0)}$$

Resolviendo:

$$(s+10)(s^2+6s+64) = (s^2+(l_0-1)s-l_0)s + (\tilde{p}_1 s^2 + (\tilde{p}_0 - 10\tilde{p}_1)s - 10\tilde{p}_0)$$

$$s^3 + 16s^2 + 124s + 640 = s^3 + (l_0 - 1 + \tilde{p}_1)s^2 + (-l_0 + \tilde{p}_0 - 10\tilde{p}_1)s + (-10\tilde{p}_0)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} l_0 - 1 + \tilde{p}_1 = 16 \\ -l_0 + \tilde{p}_0 - 10\tilde{p}_1 = 124 \\ -10\tilde{p}_0 = 640 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{p}_0 = -64$$

$$\left. \begin{array}{l} l_0 + \tilde{p}_1 = 17 \\ -l_0 - 10\tilde{p}_1 = 188 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -9\tilde{p}_1 = 205 \\ \Rightarrow \tilde{p}_1 = -\frac{205}{9} \end{array}$$

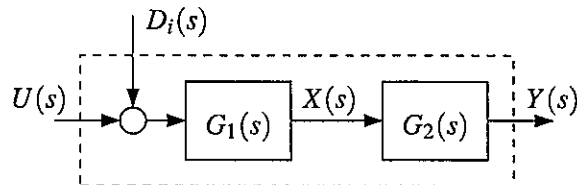
$$\Rightarrow l_0 = 17 + \frac{205}{9} = \frac{358}{9}$$

Problema 2.5 (10 puntos) Considere la planta de la figura en que

$$G_1(s) = \frac{1}{s} \quad G_2(s) = \frac{-0.2s+1}{(s+3)^2}$$

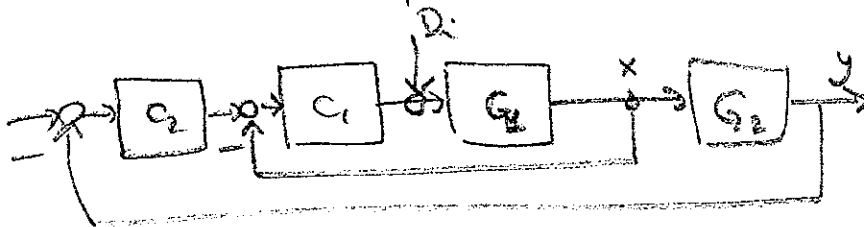
Se sabe que las perturbaciones de entrada son de tipo escalón y que es posible medir $x(t)$.

Determine un esquema de control indicando claramente cómo toma en cuenta los requisitos de diseño y la información disponible.



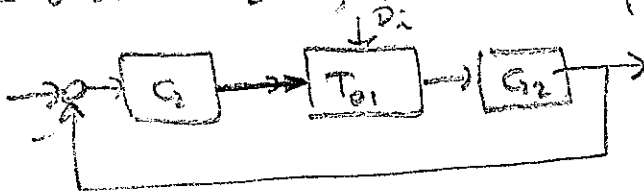
Solución

- Cero de F.N.M. en $s=5 \Rightarrow \text{Re}(h_i) > 5$
- Perturbaciones de entrada tipo escalón $\Rightarrow$ cantidad de integración
- Integración en la planta + integración en el controlador
 $\Rightarrow$ Habrá overshoot, pero que se puede evitar si se usa un esquema en cascada:



$\Rightarrow C_1(s)$ se diseña solo para estabilizar bajo ruido interno: $G_1(s)$ sin integración evita overshoot: $A_{d1} = A_{o1}L_1 + B_{o1}P_1$
 $= s + K_1 \Rightarrow k_1 = 2$ (por ejemplo)

$\Rightarrow$ Para diseñar $C_2(s)$, se obtiene planta amplificada



$$\text{en } \text{gan}(T_{01}G_2) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{(-0.2s+1)}{(s+3)^2}$$

$$C_2 \text{ se puede diseñar usando } \gamma_{\text{onda}} \quad T_{02} = \frac{(-0.2s+1) \omega_m^2 \cdot 3}{(s^2 + 2\beta \omega_m s + \omega_m^2)(s+3)}$$

T_{02} es estable, mismo grado relativo de $(T_{01}G_2)$ y cero de F.N.M. de $(T_{01}G_2)$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{T_{02}}{T_{01}G_2} = \frac{(s+2)(s+3) \omega_m^2 \cdot 3}{(s^2 + 2\beta \omega_m s + \omega_m^2) 2}$$

$$(T_{01} G_2) = \frac{2(-0.2s+1)}{(s+2)(s+3)^2}$$

$$\Rightarrow T_{02} = \frac{(-0.2s+1) 3\omega_n^2}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+3)}$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{T_{02}}{(T_{01} G_2)} = \frac{3\omega_n^2 (s+2)(s+3)^2}{2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+3)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C_2 &= \frac{Q_2}{1 - Q_2(T_{01} G_2)} = \frac{Q_2}{1 - T_{02}} = \frac{3\omega_n^2 (s+2)(s+3)}{2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3\omega_n^2(-0.2s+1)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+3)}} \\ &= \frac{3\omega_n^2 (s+2)(s+3)^2}{2(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+3) - 6\omega_n^2(-0.2s+1)} \end{aligned}$$

(donde se confirma que $C_2(s)$ es bi-proper y tiene integración)

Problema 2.6 (10 puntos) Se desea controlar una planta con modelo nominal $G_o(s)$, sabiendo que existe error de modelado

$$|G_\Delta(j\omega)| \leq \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

Se hace un diseño tal que

$$T_o(s) = \frac{\alpha}{s + \alpha} \quad (\alpha > 0)$$

Determine el rango de valores de α tal que

$$0,75|S_o(j\omega)| \leq |S(j\omega)| \leq 1,25|S_o(j\omega)| \quad \forall \omega$$

Solución

- El requisito de desempeño robusto establece

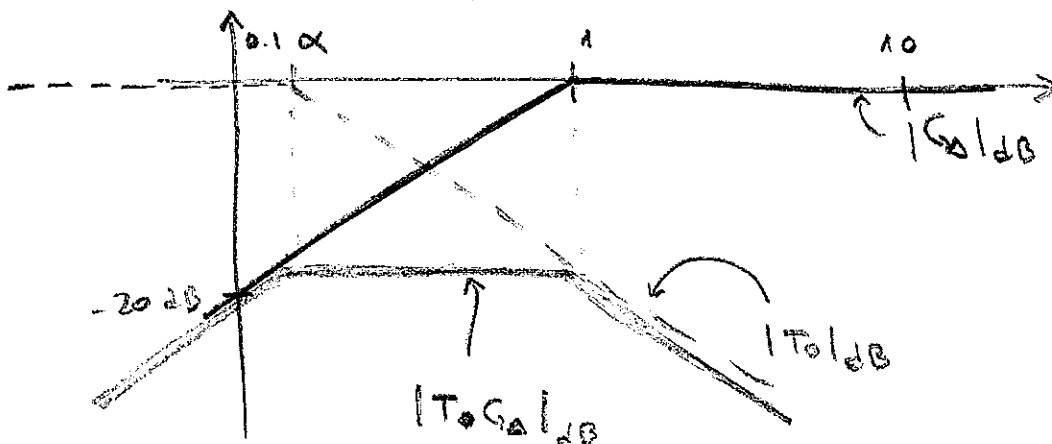
$$\frac{3}{4}|S_o| \leq \frac{1}{1 + |T_o G_o|} |S_o| \leq |S(j\omega)| \leq \frac{1}{1 - |T_o G_o|} |S_o| \leq \frac{5}{4} |S_o|$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + |T_o G_o| \leq \frac{4}{3} \Rightarrow |T_o G_o| \leq \frac{1}{3} \\ 1 - |T_o G_o| \geq \frac{4}{5} \Rightarrow |T_o G_o| \leq \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow |T_o G_o| \leq \frac{1}{5} \quad (*) \text{ condición más exigente.}$$

$$\Leftrightarrow |T_o G_o|_{dB} \leq -14 \text{ [dB]}$$

- $|T_o|$ y $|G_o|$ pueden representarse por sus asíntotas



Si $\alpha = 0.2$ la asíntota horizontal de $|T_o G_o|$ se ubica justamente

en $-14 \text{ dB} \Rightarrow$

$$\boxed{\alpha < 0.2}$$

(y $\alpha > 0$ para estabilidad)