Certamen #1 – ELO270 – S2 2017

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *Un sistema está definido por su ecuación diferencial*

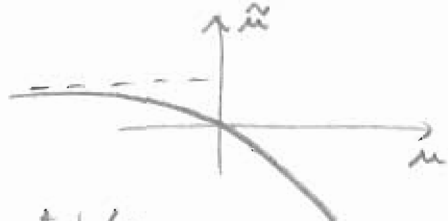
$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 1 - e^{u(t)}$$

Proponga un esquema de control en lazo abierto que garantice seguimiento perfecto en estado estacionario a referencias constantes.

Solución

El sistema tiene una no linealidad en la entrada y luego un bloque lineal.

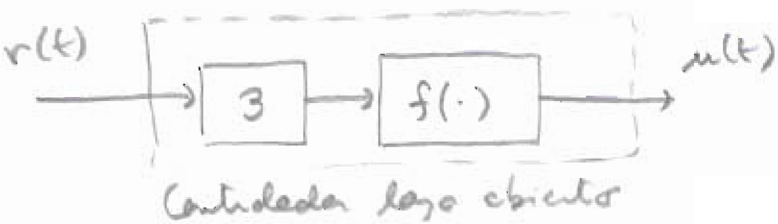
en que $\tilde{u}(t) = 1 - e^{u(t)}$



$\iff \quad u(t) = \ln(-\tilde{u}(t) - 1)$

Es decir la no linealidad es invertible (para $\tilde{u} \leq 1$)

Un esquema de control posible es



f(·) es la inversa de la no linealidad

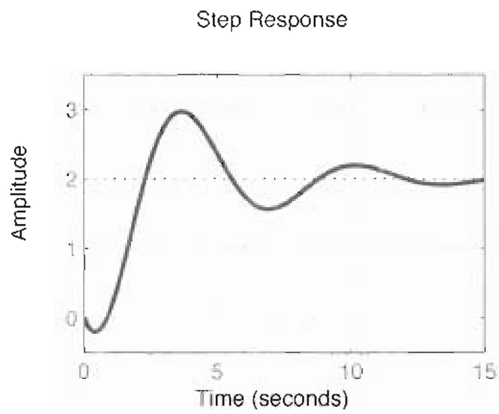
en que $u(t) = \ln(-3r(t) - 1)$

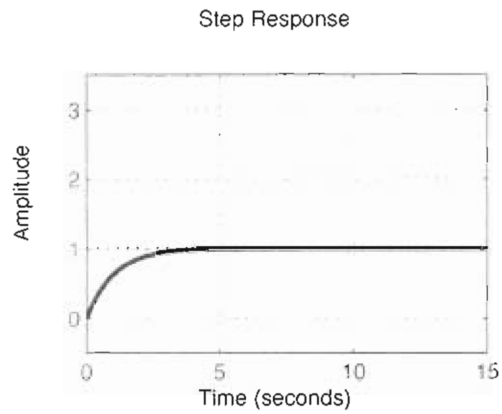
De esta manera $\tilde{u}(t) = 1 - e^{\ln(-3r(t) - 1)}$

$= 3r(t)$

$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{3}{s+3} = T(s)$ que garantiza seguimiento perfecto en e.e. a referencias constantes pues $T(0) = 1$

Problema 1.2 (10 puntos) *La figura izquierda muestra la respuesta a escalón unitario de una planta y la figura derecha muestra la respuesta deseada cuando se introduce un escalón unitario como referencia a seguir, en ambos casos con condiciones iniciales iguales a cero. Determine si es posible diseñar un lazo de control estandar con un grado de libertad (Figura 1) que permita lograr el objetivo de control deseado.*





Solución

De la figura izquierda, se aprecia que la planta tiene un cero de fase no mínima y polos complejos conjugados en el SPI (es estable)

$$G_o(s) = \frac{(-s+c)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad c>0,\ \omega_n>0,\ 0<\xi<1 \qquad G_o(0)>0$$

De la figura derecha, se aprecia que la función de sensibilidad nominal complementaria deseada es de primer orden y estable

$$T_o(s) = \frac{1}{\tau s+1} \qquad \tau>0$$

Note que NO se cumple la condición de interpolación $T_o(c)=0$ por tanto el cero de fase no mínima fue cancelado por el controlador y, por tanto, el lazo es INESTABLE.

[De hecho: $T_o = \frac{G_o C}{1+G_o C} \iff C = \frac{T_o}{G_o(1-T_o)} = \frac{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}{(-s+c)\,\tau s}$]

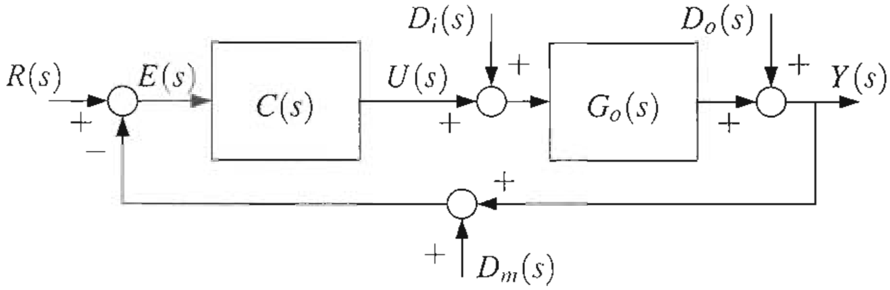


Figura 1: Lazo de control con un grado de libertad

Problema 1.3 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$G_o(s) = \frac{s+2}{s^2+0{,}5s+1} \qquad S_o(s) = \frac{s}{s+1}$$

Determine si se satisfacen los siguientes requisitos de diseño

(a) Lazo internamente estable,

(b) Seguimiento perfecto en estado estacionario a referencia constante

Fundamente claramente su respuesta.

Solución

(a) Note que $G_o(s)$ tiene polos y ceros estables que pueden ser cancelados (sin que el lazo se vuelva inestable) y $S_o(s)$ es estable, por tanto el lazo es internamente estable

[De hecho

$$\left.\begin{aligned} S_o(s) &= \frac{s}{s+1} \\ T_o(s) &= 1 - S_o(s) = \frac{1}{s+1} \\ S_{uo}(s) &= \frac{T_o(s)}{G_o(s)} = \frac{s^2+0.5s+1}{(s+2)(s+1)} \\ S_{io}(s) &= S_o(s)\,G_o(s) = \frac{(s+2)\,s}{(s^2+0.5s+1)(s+1)} \end{aligned}\right\} \text{todos estables}$$

]

(b) $T_o(0) = 1$ por tanto SI hay seguimiento perfecto a referencias constantes en e.e.

Problema 1.4 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1} \qquad T_o(s) = \frac{1}{\tau s+1}$$

Determine cuál es máximo ancho de banda que puede elegirse para el lazo cerrado de tal manera que se garantice que $|u(t)| \leq 10$ la perturbación de salida es un escalón unitario.

Solución

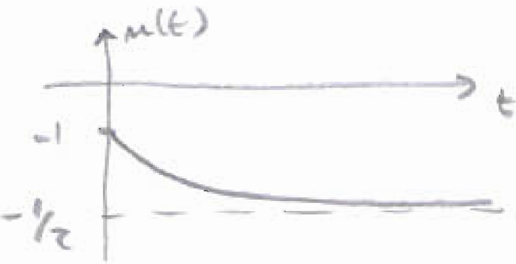
La función transferencia entre la perturbación de salida $d_o(t)$ y $u(t)$ es

$$\frac{U(s)}{D_o(s)} = \frac{-G_o(s)}{1+G_o(s)C(s)} = -S_{uo}(s) = \frac{-T_o(s)}{G_o(s)} = \frac{-(s+1)}{(\tau s+1)}$$

La respuesta a escalón unitario es

$$U(s) = \frac{-(s+1)}{(\tau s+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s+1} = A + Be^{-t/\tau}$$

Note que, por la forma de la respuesta sus máximos y mínimos están en $t=0^+$ y en $t \to \infty$



$$u(0^+) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = -1/\tau$$

$$u(\infty) = \lim_{s\to 0} sU(s) = -1$$

Por tanto, $|u(t)| \leq 10 \iff \frac{1}{\tau} \leq 10$

y justamente el ancho de banda de $T_o(s)$ es $\frac{1}{\tau}$ y debe ser menor que 10 [rad/s]

Problema 1.5 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1 el modelo nominal de la planta y el controlador son, respectivamente,*

$$G_o(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad C(s) = K_p$$

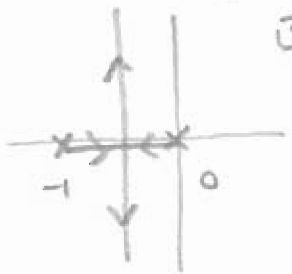
tal que el lazo el lazo nominal es internamente estable. Determine bajo qué condiciones el lazo ***verdadero*** *es estable si la planta* ***verdadera*** *tiene un polo rápido estable no modelado, es decir, si*

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(\alpha s+1)} \qquad \alpha << 1$$

Solución

El lazo nominal es estable $\iff$ $K_p > 0$

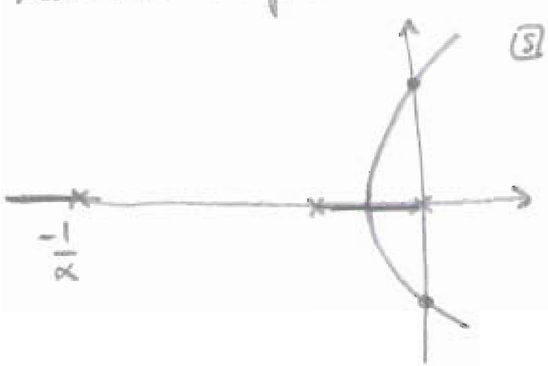
[Se puede ver por LGR o por $A_{cl}(s) = \underbrace{s^2 + s + K_p}_{\text{estable} \iff K_p > 0}$]



$\mu_k = (2k-1)\frac{\pi}{2}$

$\sigma = \frac{-1}{2}$

El lazo verdadero es estable y $K_p < K_{p,\text{critico}}$, lo que también se puede ver en el LGR y en el Routh:



pues ahora

$\mu_k = (2k-1)\frac{\pi}{3}$

$\sigma = \frac{-1-1/\alpha}{2}$

$$A_{cl}(s) = s(s+1)(\alpha s+1) + K_p$$
$$= \alpha s^3 + (1+\alpha)s^2 + s + K_p$$

Routh:

s^3	α	1	0
s^2	$1+\alpha$	K_p	0
s	$\frac{1+\alpha-\alpha K_p}{1+\alpha}$	0	
1	K_p		

Por tanto debe cumplirse $1+\alpha-\alpha K_p > 0$

$$\boxed{K_p < \frac{1+\alpha}{\alpha}}$$

Problema 1.6 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$G_o(s) = \frac{1}{s^2-1} \qquad C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

Si $T_i > 0$ está fijo, haga un diagrama del LGR del polinomio de lazo cerrado cuando $K_p > 0$.

Solución

$$A_{cl}(s) = \underbrace{(s^2-1)T_i s}_{n=3} + \underbrace{K_p}_{\lambda>0}\underbrace{(T_i s+1)}_{m=1}$$

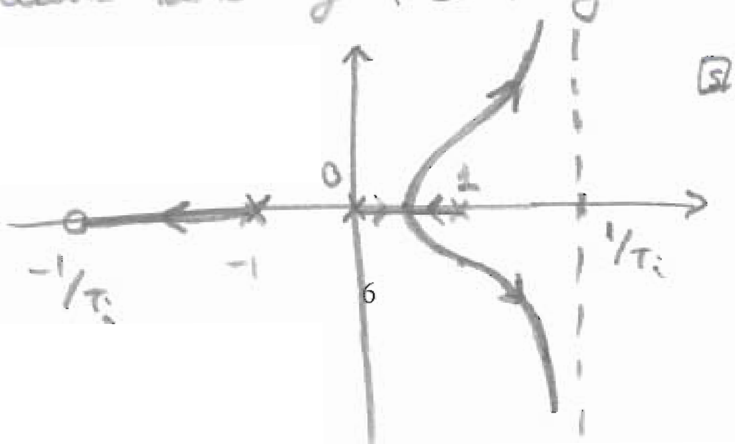
polos en 1, -1 y 0 cero en $-\frac{1}{T_i}$

Para construir el LGR se aprecia que

- existen 3 raíces
- empiezan en 1, -1, 0
- terminan en $-\frac{1}{T_i}$ y 2 van a ∞
- Asíntotas: $\sigma = \frac{\sum p - \sum c}{\#p - \#c} = \frac{0-(-1/T_i)}{3-1} = \frac{1}{T_i}$

$$\eta_k = (2k-1)\frac{\pi}{\#p-\#c} = (2k-1)\frac{\pi}{2}$$

- Hay LGR en el eje real a la izquierda de un número impar de polos y ceros. Si bien no se conoce la ubicación exacta del cero en $-1/T_i$, este se encuentra en el eje real negativo.

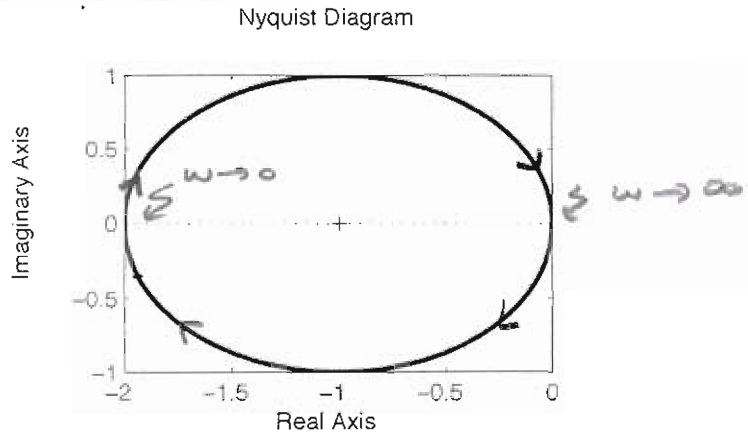


Problema 1.7 (10 puntos) *La Figura muestra el diagrama de Nyquist de una transferencia (sin cancelaciones)*

$$L(s) = G_o(s)C(s) = \frac{2K_p}{(s-1)(s^2+s+1)}$$

cuando $K_p = 1$.

Determine para qué rango de valores de K_P *el lazo es internamente estable.*



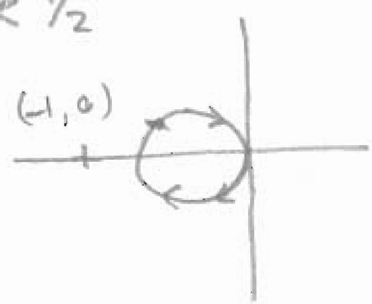
Solución

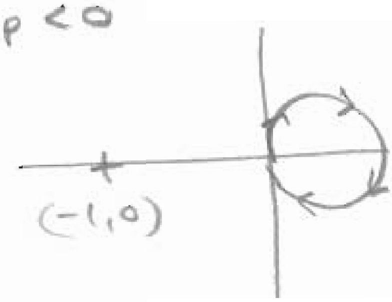
La transferencia dada tiene $P=1$ polos inestables

De la figura, se observa que el Nyquist encierra $N = 1$ veces en sentido horario el punto $(-1,0)$, por tanto el lazo cerrado tiene $Z = N+P = 2$ polos inestables.

Esta situación se da para $K_p > 1/2$

Si $K_p < 1/2$ o si $K_p < 0$





Por tanto $N = 0 \Rightarrow Z = N+P = 1$

es decir hay 1 polo inestable

[Note que el problema también puede ser analizado por Routh o LGR]