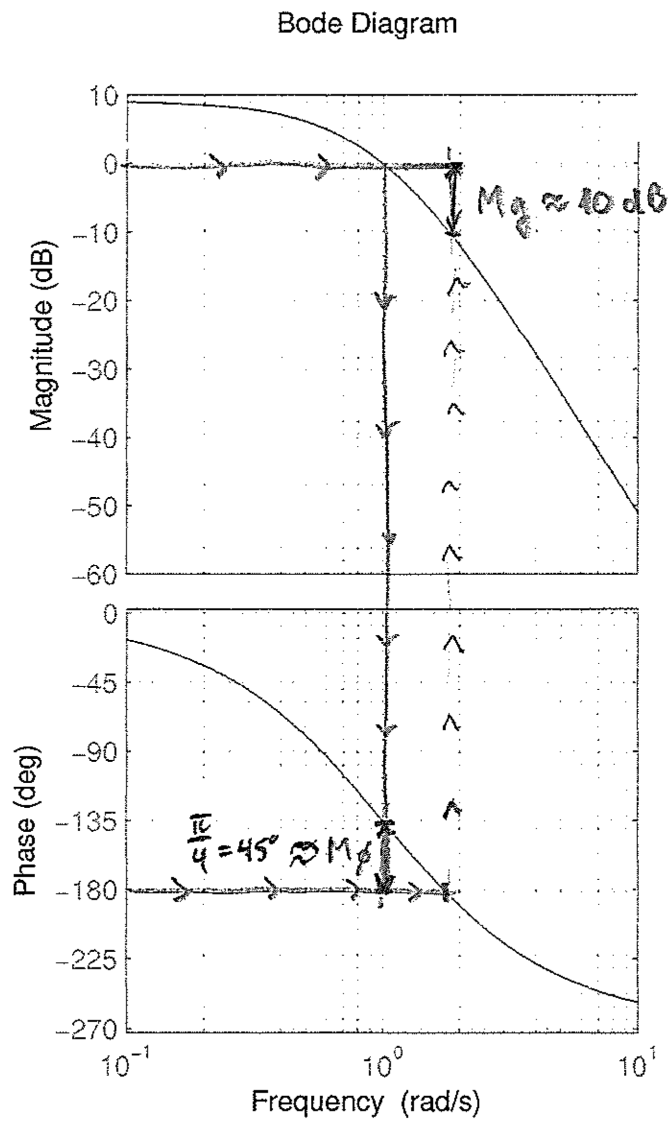
Certamen #2 – ELO270 – S2 2017

Soluciones



Problema 2.1 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Bode de la transferencia de lazo abierto estable. Determine el máximo retardo que se puede agregar a la transferencia de lazo abierto antes que el lazo se inestabilice.*

Solución

Del diagrama de Bode se aprecia que $M_\phi \approx 45°$ cuando $\omega_\phi = 1 \frac{rad}{s}$ y el margen de ganancia es $M_g \approx 10$ dB cuando $\omega_g \approx 2 \frac{rad}{s}$

El máximo retardo que se puede agregar es tal que

$$-M_\phi = \measuredangle e^{-j\omega_\phi T_d} \Leftrightarrow T_d = \frac{M_\phi}{\omega_\phi} = \frac{\pi/4}{1} \approx 0.75 \text{ [s]}$$

Problema 2.2 (10 puntos) *Considere una planta con modelo nominal*

$$G(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s-1}$$

Diseñe un controlador estabilizante que garantice rechazo perfecto en estado estacionario a perturbaciones de salida de tipo escalón y que satisfaga

$$0,5|S_o(j\omega)| \leq |S(j\omega)| \leq 1,5|S_o(j\omega)| \qquad \left(\log_{10} 3 \approx 1/2\right)$$

Solución

De la condición de desempeño robusto

$$|S_o| \frac{1}{1+|T_o||G_\Delta|} \leq |S(j\omega)| \leq \frac{1}{1-|T_o||G_\Delta|} |S_o|$$

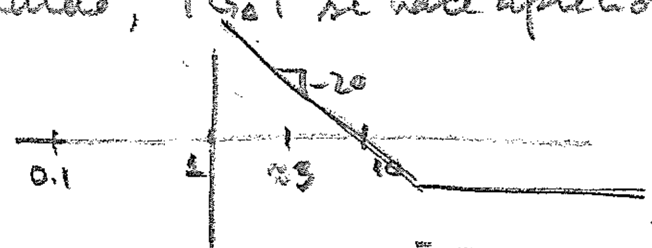
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+|T_o||G_\Delta|} \Rightarrow |T_o||G_\Delta| < 1$$

y

$$\frac{3}{2} \geq \frac{1}{1-|T_o||G_\Delta|} \Rightarrow |T_o||G_\Delta| < 1/3$$

$$|T_o|_{dB} < -|G_\Delta|_{dB} - 20 \underbrace{\log_{10} 3}_{\approx 1/2}$$

Si se desprecia el retardo, $|G_\Delta|$ se hace apreciable para $\omega \approx \frac{1}{\tau_d} = 10$



Para que $|T_o|_{dB}$ esté 10 dB bajo $-|G_\Delta|_{dB}$ el ancho de banda debe ser menor que $\omega \approx 3$ pero MAYOR que $\omega = 1$ por el polo inestable

$G_o(s) = \frac{1}{s-1}$ $(n=1)$ $\quad C(s)$. con integración para rechazo en e.e. a $d_o(t)$

$(r=1) \Rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$

$$\Rightarrow A_{cl}(s) = A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)$$

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = (s-1)s + p_1 s + p_0 \Rightarrow \begin{aligned} p_1 &= 1 + 2\xi\omega_n \\ p_0 &= \omega_n^2 \end{aligned}$$

$\omega_n < 3$

$\xi = 0.7$

Problema 2.3 (10 puntos) *En un lazo de control estándar con un grado de libertad*

$$G_o(s) = \frac{1}{s+1} \qquad C(s) = \frac{3(s+1)}{4s}$$

Se sabe además que la actuación está limitada a $|u(t)| \leq 2$ y que la referencia es $r(t) = \cos(t)$. Determine si, en estado estacionario, hay o no saturación en la actuación.

Solución

Para determinar la actuación en estado estacionario calculamos

$$S_{uo}(s) = \frac{C(s)}{1 + G_o(s)C(s)} = \frac{\frac{3(s+1)}{4s}}{1 + \frac{3}{4s}} = \frac{3(s+1)}{4s+3}$$

[Note que hay una cancelación estable, por tanto
$A_{cl}(s) = (4s+3)(s+1)$: es estable $\Rightarrow$ Existe el e.e.]

Si $r(t) = \cos(t) \Rightarrow u_{ee}(t) = |S_{uo}(j1)| \cos(t + \angle S_{uo}(j1))$

$$S_{uo}(j1) = \frac{3(j+1)}{4j+3} \Rightarrow |S_{uo}(j1)| = \frac{3\sqrt{2}}{5} \approx \frac{3 \cdot 1.4}{5} < 2$$

... lo cual indica que NO hay saturación en la actuación

Problema 2.4 (10 puntos) *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{1}{s-2}$$

Diseñe un controlador estabilizante si se sabe que existe un perturbación de entrada de la forma $d_i(t) = A\cos(t+\phi)$.

Solución

1) Planta inestable con polo en $s=2$: Ancho de banda debe ser mayor que 2 para evitar overshoot excesivo

2) Perturbación de entrada de la forma $A\cos(t+\phi)$

i) Se puede ATENUAR, eligiendo ancho de banda del lazo MAYOR que $\omega = 1$ rad/s, o bien

ii) Se puede diseñar un controlador resonante de manera de obtener rechazo perfecto en e.e.

Caso i) Se diseña un controlador con integración ($r=1$) que estabilice el lazo y que el ancho de banda sea mayor que $\omega = 2$ rad/s

$$G_o(s) = \frac{1}{s-2} \Rightarrow n=1 \Rightarrow C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \quad (n_c = n-1+r = 1)$$

Ecuación característica: $A_{cl}(s) = A_o(s)L(s) + B_o(s)P(s)$

$$\underbrace{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} = (s-2)s + 1(p_1 s+p_0)$$

por ejemplo $\omega_n = 3$, $\xi = 0.7$

$$2\xi\omega_n = -2+p_1$$
$$\omega_n^2 = p_0$$

Caso (iii) Se diseña controlador resonante ($r=2$) que estabilice el lazo

Dado que $C(s)$ no tiene integración no es válido el criterio del overshoot, por tanto puede o no respetarse.

$$G_o(s) = \frac{1}{s-2} \Rightarrow n=1 \Rightarrow C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s^2+1^2} \qquad n_c = n-1+r = 2$$

$\Rightarrow$ Ec. diofantina

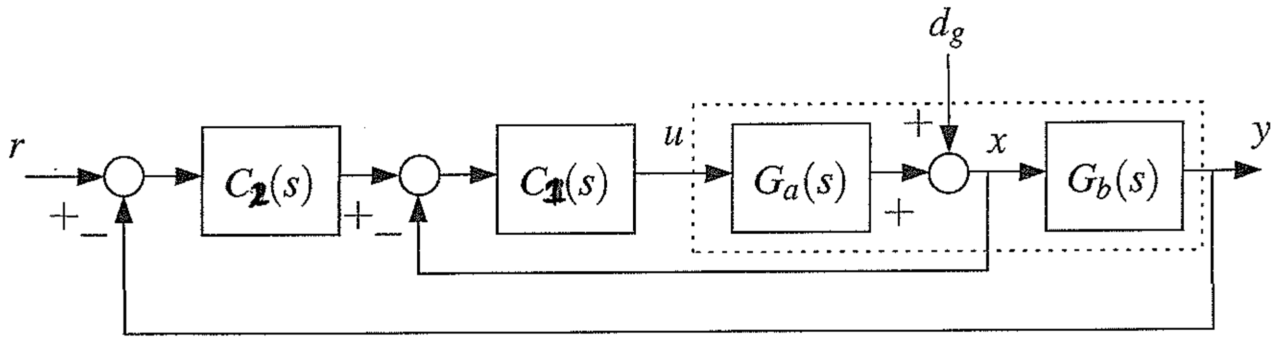
$$A_{cl} = A_o L + B_o P$$

$$\underline{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+a)} = (s-2)(s^2+1) + p_2 s^2 + p_1 s + p_0$$

Por ejemplo

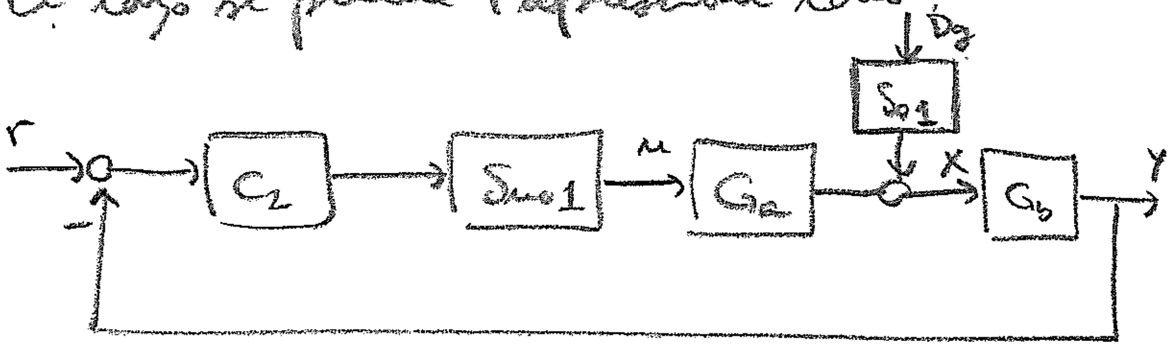
$$\left.\begin{aligned} \omega_n &= 2 \\ \xi &= 0.7 \\ a &= 3 \end{aligned}\right\} \quad B_w \approx 2 \text{ rad/s}$$

... de donde se obtienen p_2, p_1, p_0



Problema 2.5 (10 puntos) *En el lazo de control en cascada de la figura, determine la función de transferencia entre $r(t)$ y $u(t)$.*

El lazo se puede representar como:



en que $S_{uo1} = \dfrac{C_1}{1 + G_a C_1}$

por tanto

$$\frac{U(s)}{R(s)} = \frac{C_2 S_{uo1}}{1 + C_2 S_{uo1} G_a G_b} = \frac{C_2 C_1}{1 + G_a C_1 + G_a G_b C_1 C_2}$$

Suponemos $d_g(t) = 0$ ($\Leftrightarrow D_g(s) = 0$) por superposición

Problema 2.6 (10 puntos) *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \omega_o^2}$$

Se desea diseñar un lazo de control estable cuyo transiente decaiga al menos tan rápido como e^{-2t}. Explique claramente todas las condiciones que debe satisfacer una función de sensibilidad nominal complementaria $T_o(s)$ "adecuada".

Solución

La función de sensibilidad nominal complementaria debe cumplir las siguientes condiciones:

i) Ser estable

ii) Polos dominantes a la izquierda de $\mathrm{Re}\{s\} = -2$

iii) Condiciones de interpolación

$G_o(\pm j\omega_o) = \infty \Rightarrow T_o(\pm j\omega_o) = 1$ y $S_o(\pm j\omega_o) = 0$

de otra forma los polos de la planta fueron cancelados y el lazo es inestable

iv) Grado relativo de $T_o(s) \geq$ grado relativo de $G_o(s) = 2$

de otra forma $C(s)$ es impropio.