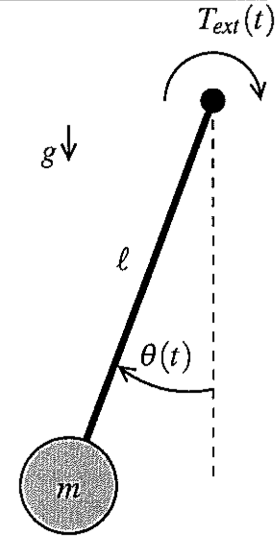
Solución

# ELO270 – S2 2017 – Control #1 – 13 de septiembre de 2017

**Problema Q1. 1** *Un pendulo simple se puede modelar mediante la Ecuación Diferencial del Sistema (EDS):*

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -mg\ell\sin\theta(t) - C\frac{d\theta(t)}{dt} + T_{ext}(t)$$

*en que $\theta(t)$ es el ángulo de desviación respecto a la vertical, $J = m\ell^2$ es el momento de inercia del péndulo, $m = 0{,}25$ es la masa en el extremo del péndulo, $\ell = 0{,}4$ es el largo del péndulo, $g \approx 10$ es la aceleración de gravedad, $C = 0{,}7$ es una constante de roce "viscoso" y $T_{ext}(t)$ es un torque externo aplicado en el extremo fijo del péndulo.*




*(a) Determine la función de transferencia del modelo linealizado en torno a el (o los) punto(s) de operación en equilibrio determinado(s) por $T_{ext} = 0$*

*(b) Haga un gráfico (aproximado, pero cualitativamente correcto) de la respuesta del(de los) modelo(s) linealizado(s), cuando $T_{ext}(t)$ es un escalón unitario y las condiciones iniciales son cero.*

(a)
- Para el cálculo de el o los puntos de operación Q en equilibrio se considera

$$\left.\begin{aligned} (T_{ext})_Q &= 0 \\ \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_Q &= 0 \\ \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_Q &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 0 = -mg\ell\,\mathrm{sen}(\theta_Q) \Rightarrow \theta_Q = \begin{cases} 0 & \text{(abajo)} \\ \pi & \text{(arriba)} \end{cases}$$

es decir existen 2 puntos: $Q_1$ y $Q_2$

- Para linealizar consideramos

$$\begin{cases} \Delta T_{ext} = T_{ext}(t) - \underbrace{\cancel{(T_{ext})_Q}}_{0} \\ \Delta\theta = \theta(t) - \theta_Q \\ \frac{d}{dt}\Delta\theta = \frac{d}{dt}\theta \\ \frac{d^2}{dt^2}\Delta\theta = \frac{d^2}{dt^2}\theta \end{cases}$$

y expandimos en Taylor hasta primer orden:

$$J\left[\underbrace{\cancel{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_Q}}_{0} + \left(\frac{d^2\theta}{dt^2} - \underbrace{\cancel{\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_Q}}_{0}\right)\right] = -mg\ell\left(\overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,\theta_Q}} + (\cos\theta_Q)(\theta(t)-\theta_Q)\right) - C\left[\underbrace{\cancel{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_Q}}_{0} + \left(\frac{d\theta}{dt} - \underbrace{\cancel{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_Q}}_{0}\right)\right]$$

$$+ \overset{0}{\cancel{(T_{ext})_Q}} + \left(T_{ext}(t) - \overset{0}{\cancel{(T_{ext})_Q}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{J\frac{d^2}{dt^2}\Delta\theta = -mg\ell\left[\cos\theta_Q\right]\Delta\theta - C\frac{d\Delta\theta}{dt} + \Delta T_{ext}}$$

en $Q_1(\theta_Q = 0)$ :

$$J \frac{d^2}{dt^2}\Delta\theta + C \frac{d}{dt}\Delta\theta + mgl\,\Delta\theta = \Delta T_{ext}$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \left.\frac{\mathcal{L}\{\Delta T_{ext}(t)\}}{\mathcal{L}\{\Delta\theta(t)\}}\right|_{C.I.=0} = \frac{1}{Js^2 + Cs + mgl}$$

$m = 1/4$
$g = 10$
$l = 2/5$ } $mgl$
$C = 0.7$
$J = ml^2 = \frac{1}{4}\frac{4}{25}$
$= \frac{1}{25}$

$$= \frac{1}{\frac{s^2}{25} + 0.7s + 1}$$

$$= \frac{25}{s^2 + 25 \cdot 0.7 s + 25}$$

polos en : $s_{1,2} = \frac{-25 \cdot 0.7 \pm \sqrt{25^2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot 25}}{2}$

$$= \frac{-17.5 \pm 5\sqrt{8.5}}{2} \approx \begin{cases} \frac{-17.5 + 5 \cdot 3}{2} = -1.25 \\ \frac{-17.5 - 5 \cdot 3}{2} = -16.25 \end{cases}$$

(estable)

en $Q_2(\theta = \pi)$ :

$$J \frac{d^2}{dt^2}\Delta\theta + C \frac{d\Delta\theta}{dt} - mgl\,\Delta\theta = \Delta T_{ext}$$

$$\Rightarrow \quad H(s) = \frac{1}{Js^2 + Cs - mgl} = \frac{1}{\frac{s^2}{25} + 0.7s - 1}$$

$$= \frac{25}{s^2 + 25 \cdot 0.7s - 25}$$

polos en : $s_{1,2} = \frac{-25 \cdot 0.7 \pm \sqrt{25^2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 25}}{2} \approx \begin{cases} +1.25 \\ -18.75 \end{cases}$

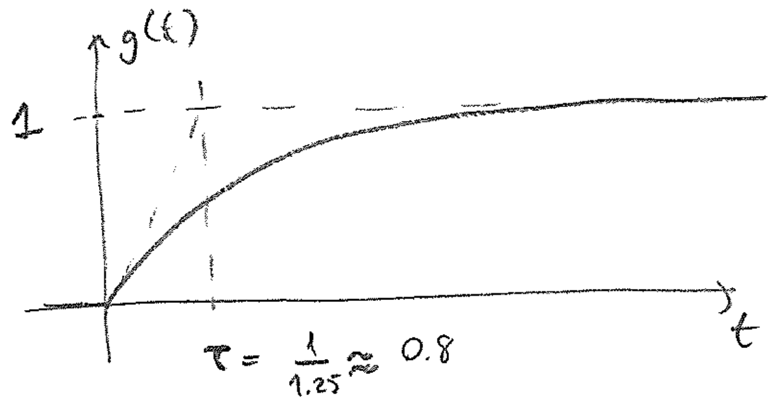
(inestable)

(b) A partir de las funciones transferencia y, en particular, a partir de sus polos se puede esbozar cualitativamente la respuesta a un escalón (sobre cada punto de operación en equilibrio)

Para $Q_1$ ($\theta_Q = 0$) $\quad H(s) = \dfrac{1}{Js^2 + Cs + mgl} = \dfrac{1}{\frac{s^2}{25} + 0.7s + 1}$

polos en $-1.$ y $-16$ (aprox) es ESTABLE!!!

y ganancia a continua $H(0) = 1$




Para $Q_2$ ($\theta_Q = \pi$) $\quad H(s) = \dfrac{1}{Js^2 + Cs - mgl} = \dfrac{1}{\frac{s^2}{25} + 0.7s - 1}$

polos en $+1.$ y en $-18$ (aprox) es INESTABLE!!!