Solución

ELO270 – S2 2017 – Control #4 – ~~29~~ 30 de octubre de 2017

Problema Q4. 1 *Considere un lazo de control estándar con un grado de libertad en que la planta tiene modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{1}{(s-1)(s+5)}$$

Se desea controlarla de manera que los modos naturales del lazo cerrado sean igual o mas rápidos que e^{-t}. Determine si es posible lograrlo con un controlador de estructura PI

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p s + K_i}{s}$$

El problema se puede resolver usando ROUTH, LGR o AMBOS.

1) x ROUTH: Para determinar si el polinomio de lazo cerrado puede tener todas sus raíces a la izquierda de $s=-1$ se puede aplicar un cambio de variables $w = s+1$

$$A_{cl}(s) = A_o L + B_o P = (s-1)(s+5)s + K_p s + K_I = 0$$

reemplazando $s = w-1 \Rightarrow$

$$(w-2)(w+4)(w-1) + K_p(w-1) + K_I = 0$$

$$(w^2+2w-8)(w-1) + K_p w + (K_I - K_p) = 0$$

$$w^3 + w^2 - 10w + 8 + K_p w + K_I - K_p = 0$$

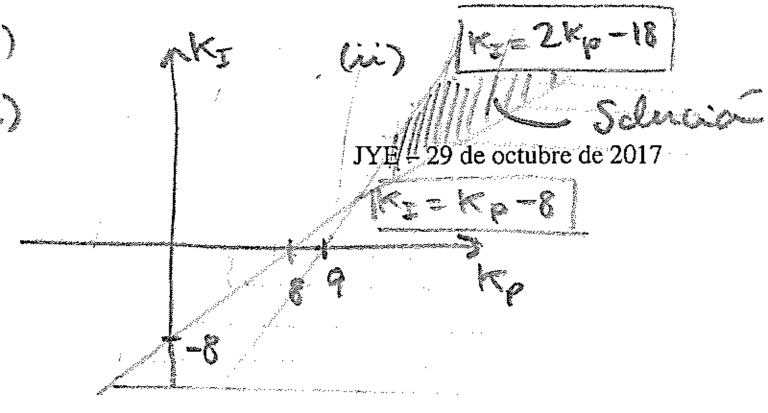
$$w^3 + w^2 + (K_p - 10)w + (K_I - K_p + 8) = 0$$

Arreglo de Routh

w^3	1	$K_p - 10$	0
w^2	1	$K_I - K_p + 8$	0
w	$K_p - 10 - (K_I - K_p + 8)$	0	0
1	$K_I - K_p + 8$		

$\Rightarrow$ Las condiciones para que TODAS las raíces cumplan $\mathrm{Re}\{w\} < 0$ ($\mathrm{Re}\{s\} < -1$) son

$$2K_p - K_I - 18 > 0 \quad (i)$$
$$K_I - K_p + 8 > 0 \quad (ii)$$



2) **x LGR:** Escribimos primero el polinomio de la forma estándar para dibujar el LGR

$$A_{cl}(s) = \underbrace{(s-1)(s+5)\,s}_{=\;D(s)} + \underbrace{k_p}_{\lambda}\cdot\underbrace{(s+c)}_{N(s)} \qquad \text{en que } c = \frac{k_I}{k_p}$$

$$= D(s) + \lambda \cdot N(s)$$

Por tanto: hay 3 raíces (polos de lazo cerrado)

LGR comienza en $1, -5, 0$

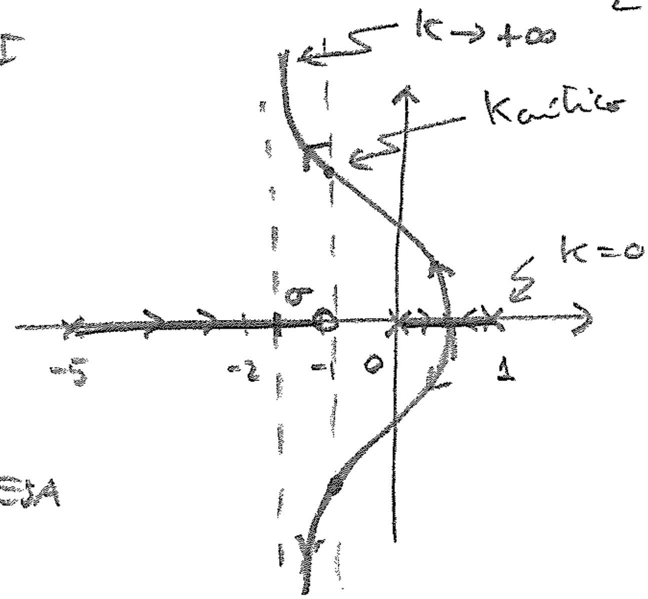
termina en $-c$ y 2 raíces se van a $|s| \to \infty$

2 asíntotas:

$$\sigma = \frac{\sum p_i - \sum c_i}{\#p - \#c} = \frac{-4+c}{2} = -2 + \frac{1}{2}c$$

$$\eta_k = (2k-1)\frac{\pi}{(\#p - \#c)} = (2k-1)\frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Es decir el controlador PI determina la posición del cero en $s = -c$ y la ganancia $\lambda = K_p$



Si se ubica el cero entre -5 y -1 se garantiza que ESA raíz cumple $Re\{s\} < -1$

Para que LAS OTRAS DOS también lo cumplan basta que $\sigma < -1$ y elegir una ganancia <u>suficientemente grande</u> $K > K_{crítico}$

Por ejemplo, si $c = -1 \Rightarrow \sigma = -1.5$