Solución

ELO270 – S2 2017 – Control #5 – 15 de noviembre de 2017

Problema Q5. 1 *Considere un lazo de control estándar, sin cancelaciones, en que*

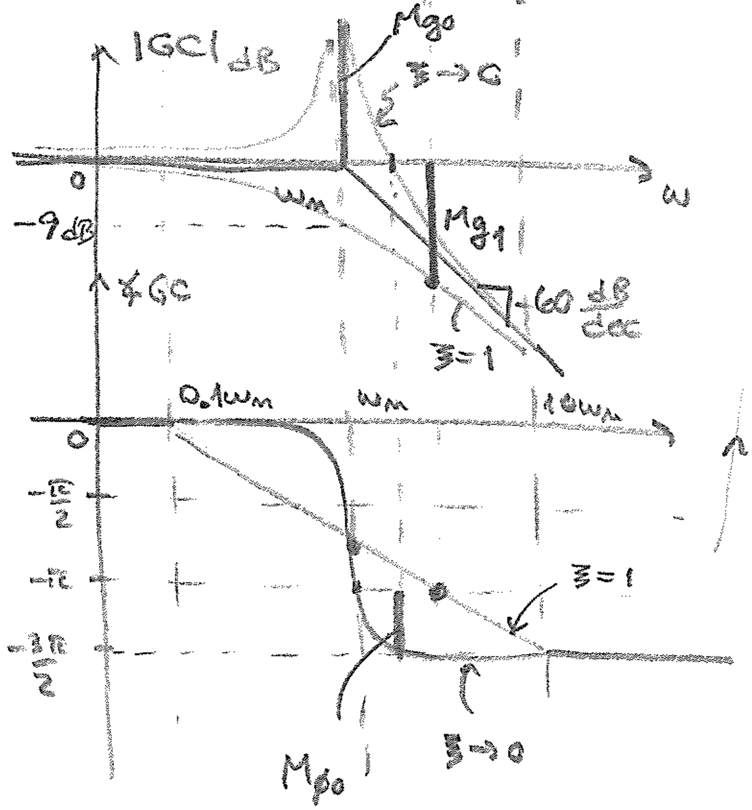
$$G_o(s)C(s) = \frac{\omega_n^3}{(s^2 + 2\xi\,\omega_n s + \omega_n^2)(s + \omega_n)}$$

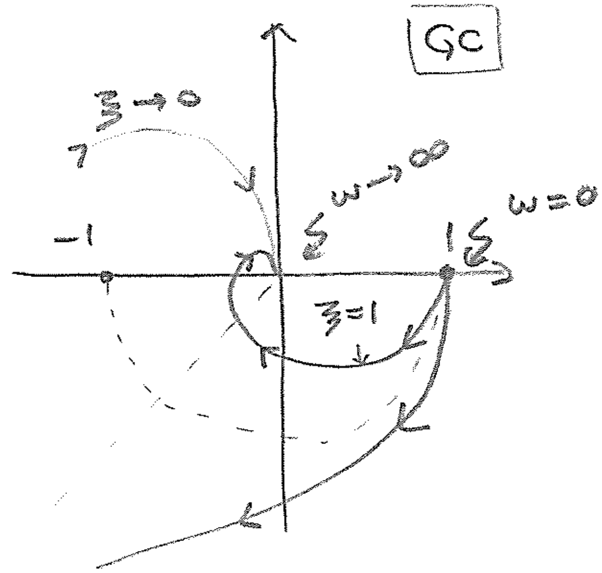
en que $\omega_n > 0$ es una frecuencia fija, pero $0 < \xi < 1$ no se conoce exactamente.

Discuta como el factor de amortiguación ξ afecta los márgenes de ganancia y de fase, fundamentando claramente su respuesta.

Los márgenes de ganancia y fase se pueden determinar en el Nyquist o en el Bode.

Las asíntotas del Bode de la transferencia dada son como en la figura derecha, pero la "curva verdadera" depende del valor de ξ





Note que: para $\xi = 1$ el Nyquist NO encierra el $(-1,0)$

$\Rightarrow$ el lazo es estable

$\Rightarrow$ el $M\phi$ es π (pues $|GC| < 1$ para $\omega > 0$)

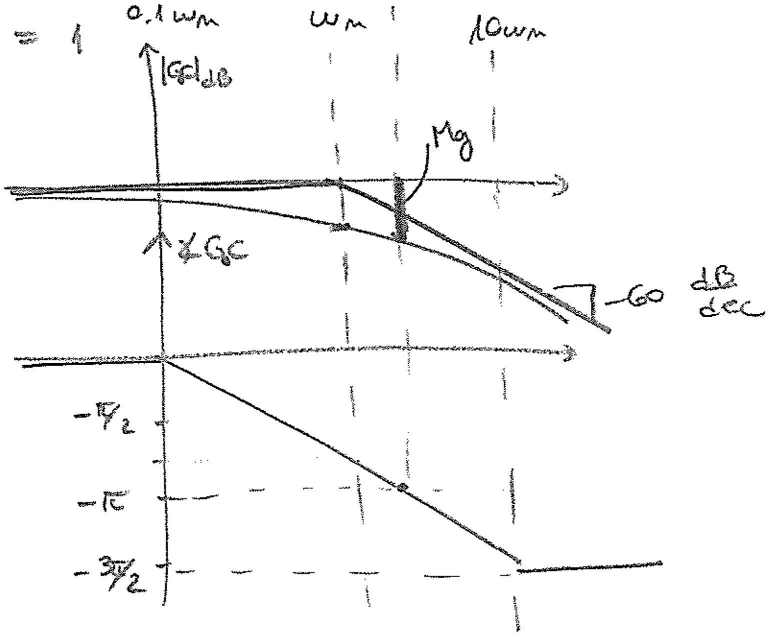
$\Rightarrow$ $M_{g1} > \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$ dB

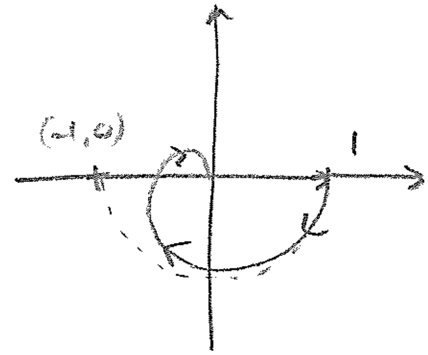
pero para $\xi \to 0$ el Nyquist sí encierra al $(-1,0)$ (2 veces)

$\Rightarrow$ el lazo es inestable ($Z = N + P = 2$ polos inestables)

$\Rightarrow$ $M\phi_0$ es negativo y M_{g0} es negativo.

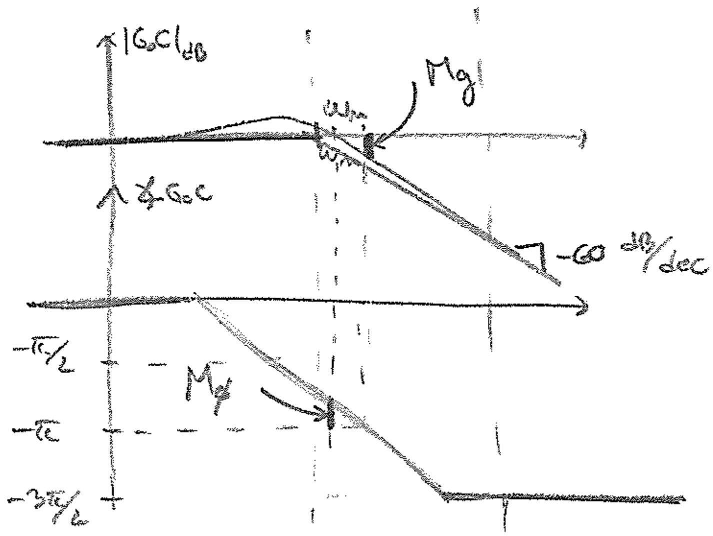
para $\xi = 1$

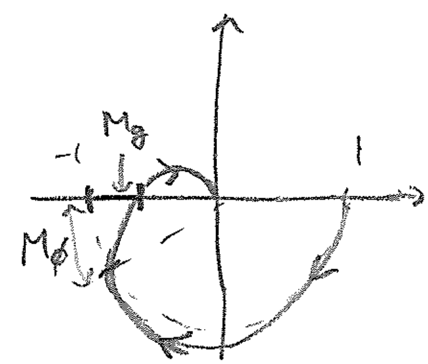




Lazo Estable

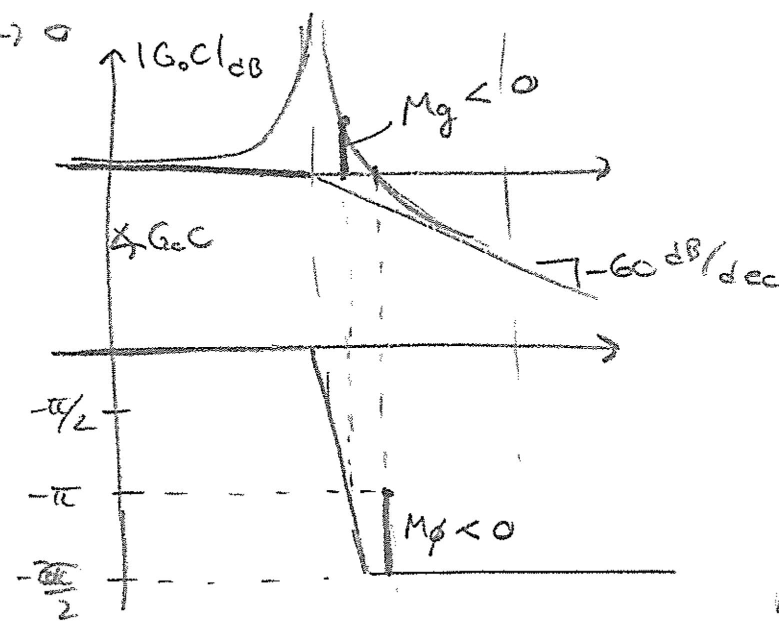
para un $0 < \xi < 1$

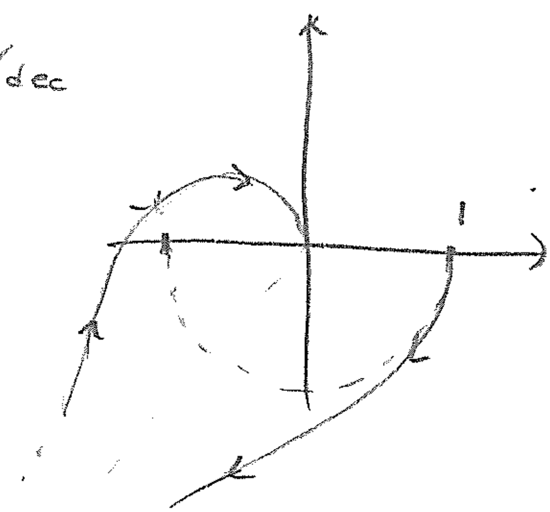




Lazo Estable

para $\xi \to 0$





Lazo inestable.

... de hecho el análisis anterior muestra que existe un valor $\xi = \xi_{\text{crítico}}$ para estabilidad.

Se puede obtener usando Routh

$$A_{cl}(s) = (s^2 + 2\xi\omega_m s + \omega_m^2)(s+\omega_m) + \omega_m^3$$

$$= s^3 + (2\xi\omega_m + \omega_m)s^2 + (\omega_m^2 + 2\xi\omega_m^2)s + 2\omega_m^3$$

s^3	1	$\omega_m^2(1+2\xi)$
s^2	$\omega_m(1+2\xi)$	$2\omega_m^3$
s	γ_{31}	0
1	$2\omega_m^3$	

en que

$$\gamma_{31} = \frac{\omega_m^3(1+2\xi) - 2\omega_m^3}{\omega_m(1+2\xi)}$$

$$\gamma_{31} > 0 \iff -1+2\xi > 0$$

$$\boxed{\xi > 1/2}$$

Es decir $\xi_{\text{crítico}} = 1/2$

De hecho si $\xi = 1/2$

$$\Rightarrow A_{cl} = (s^2 + \omega_m^2)(s + 2\omega_m)$$