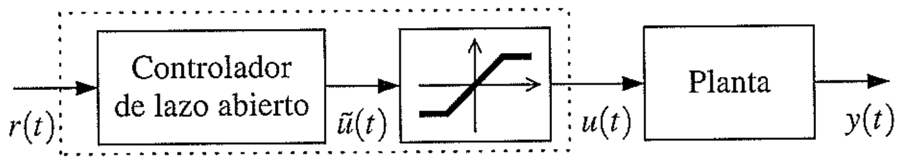
Certamen #1 – ELO270 – S2 2018

Soluciones

Problema 1.1 (10 puntos) *El esquema de control de lazo abierto de la figura, la planta está definida por su ecuación diferencial*

$$2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t-0{,}1)$$

La actuación $u(t)$ está sujeta a una saturación en que su magnitud máxima es $\max|u(t)| < 1$. Proponga un controlador de lazo abierto que garantice "el mejor seguimiento posible" cuando la referencia $r(t)$ a seguir es una escalón unitario y grafique la actuación $u(t)$ correspondiente.



Solución

La función transferencia de la planta es

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3e^{-0.1s}}{2s+1}$$ (el retardo NO puede invertirse)

La saturación está en el esquema de control: NO puede eliminarse.

El controlador puede diseñarse como el inverso aproximado de $G_0(s)$:

$$C_a(s) = \frac{2s+1}{3}\,\frac{1}{(\tau s+1)}$$ en que el polo rápido se agrega para que sea propio.

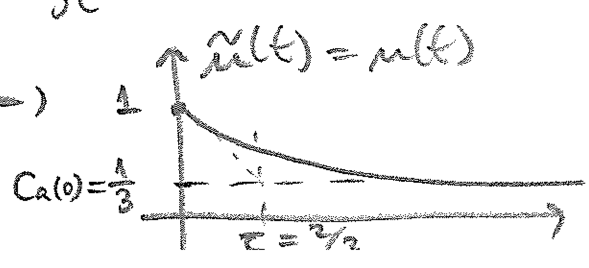
Pero note que, si $r(t) = \mu(t)$, entonces

$$u(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{1}{s}C_a(s)\right) = C_a(\infty) = \frac{2}{3\tau}$$

Por tanto para evitar la saturación, se elige τ tal que

$$\frac{2}{3\tau} \leq 1 \iff \tau \geq \frac{2}{3}$$ es decir el polo rápido no puede ser muy rápido para que NO haya saturación

Si $\tau = \frac{2}{3}$ $\Rightarrow$



Problema 1.2 (10 puntos) *Considere el lazo de control estándar con un grado de libertad de la Figura 1. Se afirma que para compensar perfectamente perturbaciones constantes de entrada y de salida es suficiente ya sea que la planta o que el controlador tenga integración (polo en $s = 0$). Determine si dicha afirmación es verdadera o falsa.*

Solución

1) La compensación de perturbaciones de salida depende de S_o

$S_o = \dfrac{1}{1+G_oC}$ por tanto para que $S_o(0) = 0$

es suficiente que $[G_oC]_{s=j0} = \infty$

es decir, que $G_o(0) = \infty$ o que $C(0) = \infty$

2) Para perturbaciones de entrada se debe analizar la sensibilidad nominal de entrada

$$S_{io} = \frac{G_o}{1+G_oC}$$

Para que $S_{io}(0) = 0$ es suficiente que $C(0) = \infty$

pero si $G_o(0) = \infty$ pero $C(0) \neq \infty$

entonces $S_{io}(0) = \left.\dfrac{1}{\frac{1}{G_o} + C}\right|_{s=0} = \dfrac{1}{C(0)}$

Por tanto <u>NO es suficiente que la planta</u> tenga integración.

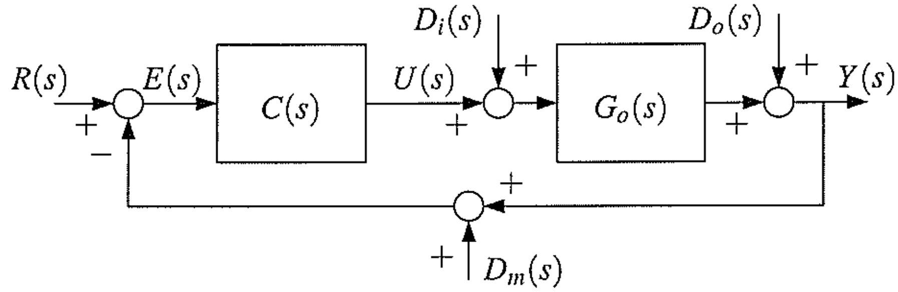


Figura 1: Lazo de control con un grado de libertad

Problema 1.3 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$G_o(s) = \frac{-s+2}{s^2+s+1} \qquad S_o(s) = \frac{s}{s+1}$$

Determine si el lazo es internamente estable.

Solución

(G_o es de orden 2 y S_o es de orden 1, por tanto debe haber cancelaciones)

Si G_o tiene un cero de fase no mínima en $s=2$ que NO puede ser cancelado, de dicha forma el lazo es inestable.

Por tanto se debe cumplir que $T_o(2) = 0 \Leftrightarrow S_o(2) = 1$ pero para la sensibilidad nominal dada $S_o(2) = \frac{2}{3}$

Esto indica que NO se cumple la condición de interpolación y el lazo es por tanto inestable.

(También es posible calcular $T_o(s) = 1 - S_o(s) = \frac{1}{s+1}$

y luego $S_{uo} = \frac{T_o}{G_o} = \frac{s^2+s+1}{(-s+2)(s+1)}$ ¡inestable!)

Problema 1.4 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1*

$$G_o(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1} \qquad T_o(s) = \frac{1}{\tau s+1} \quad ; \tau \ll 1$$

Haga un gráfico cualitativamente correcto de la actuación $u(t)$ cuando la referencia $r(t)$ es un escalón unitario.

Solución

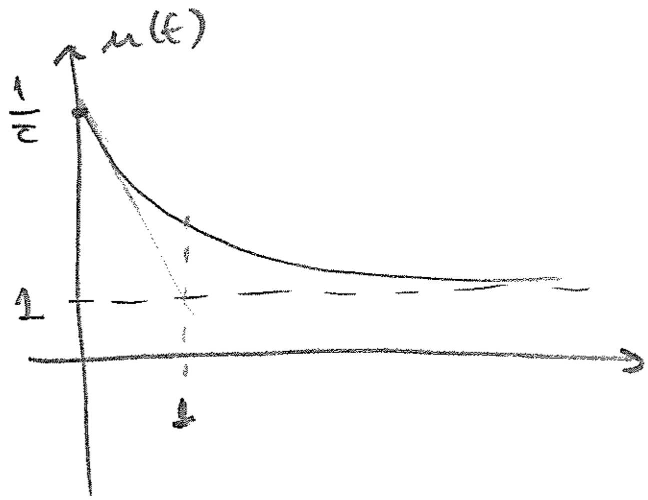
Se tiene que $U(s) = S_{uo}(s)\, R(s)$

en que $S_{uo}(s) = \dfrac{T_o(s)}{G_o(s)} = \dfrac{s^2+s+1}{(s+1)(\tau s+1)}$

$$\Rightarrow U(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)(\tau s+1)s} = \frac{A}{s} + \underbrace{\frac{B}{s+1}}_{\text{polo dominante}} + \underbrace{\frac{C}{\tau s+1}}_{\text{polo rápido}}$$

$A = S_{uo}(0) = 1$

Además $u(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,U(s) = \lim_{s\to\infty} S_{uo}(s) = \dfrac{1}{\tau} \gg 1$



(Note que la cancelación produce un polo LENTO en $S_{uo}(s)$, que es el de la planta $G_o(s)$)

Problema 1.5 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1, se tiene que*

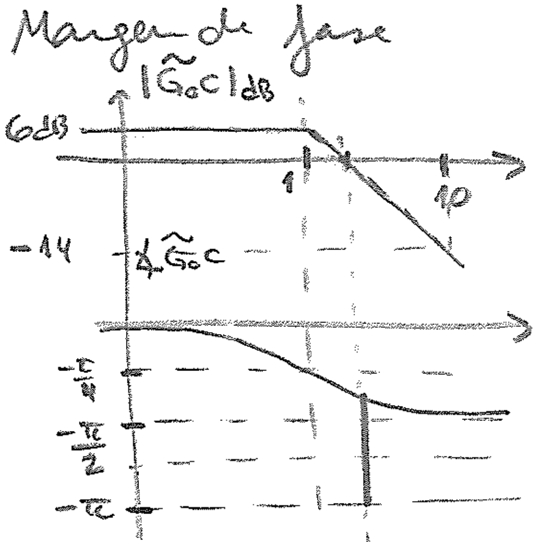
$$G_o(s)C(s) = \frac{2}{s+1}e^{-T_d s}$$

El retardo se aumenta desde $T_d = 0$ gradualmente hasta $T_d = T_{critico}$ en que el lazo exhibe una oscilación sostenida. Estime el valor de $T_{critico}$ y la frecuencia de la oscilación sostenida ω_{osc}.

Solución

Hay (al menos) tres formas de estimar el retardo crítico:

1) Margen de fase



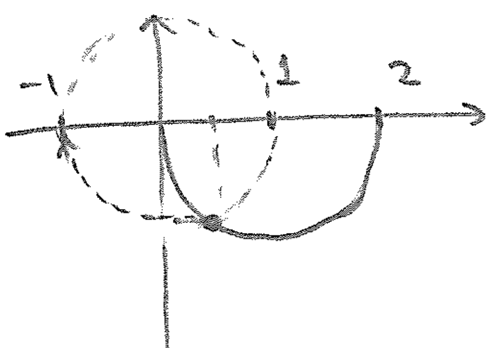
$$\tilde{G}_oC = \frac{2}{s+1}$$

⇒ del Bode de magnitud se estima que $|\tilde{G}_oC|_{dB} = 0$ cuando $\omega_\phi \approx 2 \frac{rad}{s}$

⇒ y del Bode de fase se estima que el margen de fase $\phi \approx \frac{2}{3}\pi$

≈ Margen de retardo $= \frac{\phi}{\omega_\phi} = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2} \approx 1$

2) del Nyquist



Se aprecia que el margen de fase es precisamente

$$M_\phi = \phi = \frac{2\pi}{3}$$

y sucede cuando

$$\tilde{G}_oC\Big|_{j\omega_\phi} = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{j\omega_\phi + 1} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2(1 - j\omega_\phi)}{1 + \omega_\phi^2} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{2} \iff \omega_\phi = \sqrt{3}$$

⇒ Margen de retardo $= \frac{\phi}{\omega_\phi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3) Mediante aproximación de padé (de 1er orden

$$G_oC = \frac{2e^{-T_d s}}{s+1} \approx \frac{2\left(-\frac{T_d}{2}s+1\right)}{(s+1)\left(\frac{T_d}{2}s+1\right)}$$

el polinomio de lazo cerrado asociado es

$$\mathrm{num}\{1+G_oC\} = (s+1)\left(\frac{T_d}{2}s+1\right) + 2\left(-\frac{T_d}{2}s+1\right)$$

$$= \frac{T_d}{2}s^2 + \left(1+\frac{T_d}{2}\right)s + 1 - T_d s + 2$$

$$= \frac{T_d}{2}s^2 + \left(1-\frac{T_d}{2}\right)s + 3$$

Donde se aprecia que si $T_d = 2$ el lazo se hace inestable

entonces $A_{cl}(s) = s^2 + 3$

y el lazo por tanto oscila a frecuencia $\sqrt{3}$

Problema 1.6 (10 puntos) *En el lazo de control de la Figura 1,*

$$G_o(s) = \frac{1}{s(s+2)} \qquad C(s) = 2 + \frac{\alpha}{s}$$

Haga un diagrama del LGR del polinomio de lazo cerrado cuando $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución

$$A_{cl}(s) = s^2(s+2) + 2s + \alpha$$

$$= \underbrace{[s^2 + 2s + 2]s}_{3\text{ "polos"}} + \underbrace{\alpha}_{\text{no hay ceros}}$$

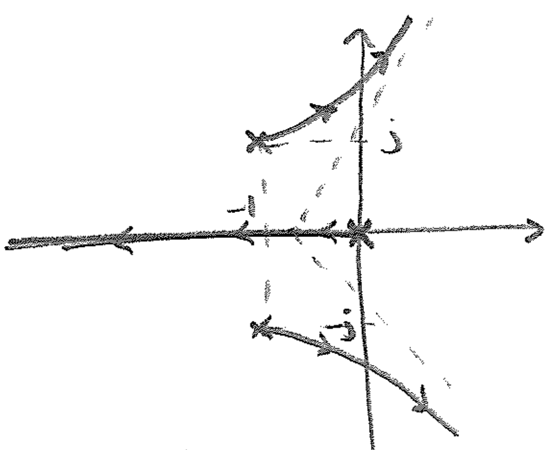
se ubican en $s = 0$

y en $s = -1 \pm j$

Para $\alpha > 0$ | el LGR comienza en los "polos" y hay 3 asíntotas

intersecto $\sigma = \dfrac{\Sigma p - \Sigma c}{\#p - \#c} = -\dfrac{2}{3}$

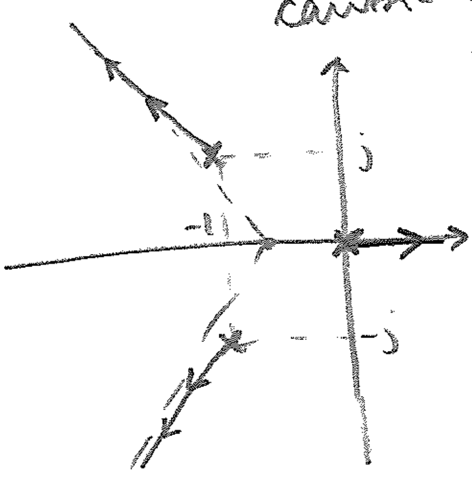
ángulo $\eta_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{3}$ $\left\{ \pi/3,\ \pi,\ -\pi/3 \right.$



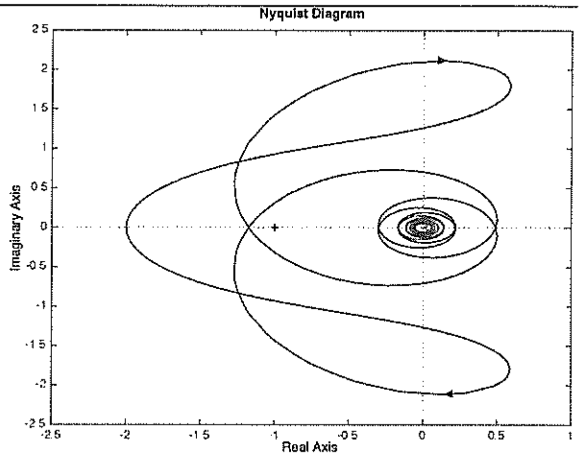
y hay LGR a la izquierda del "polo" en $s = 0$

Para $\alpha < 0$ | Se construye el LGR complementario cambia el ángulo de las asíntotas $\eta_k = 2k\dfrac{\pi}{3}$ $\left\{ \dfrac{2\pi}{3},\ -\dfrac{2\pi}{3},\ 0 \right.$

y NO hay LGR a la izquierda del "polo" en $s = 0$, pero sí hay a su derecha



Problema 1.7 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Nyquist de una transferencia de lazo abierto (sin cancelaciones) que tiene* ***un*** *polo inestable. Determine si el lazo cerrado es estable*



Solución

Se indica que G_oC tiene un polo inestable

$\Rightarrow P = 1$

En la figura se aprecia que hay 1 encierro al $(-1,0)$ pero en sentido horario

$\Rightarrow N = 1$

Por tanto $N = Z - P \Leftrightarrow Z = N + P = 2$

es decir el lazo cerrado tiene 2 polos inestables.

(de hecho el gráfico corresponde a

$$G_oC = \frac{12(s^2+s+1)}{(s-1)(s+2)(s+3)} e^{-0.3s}$$
)