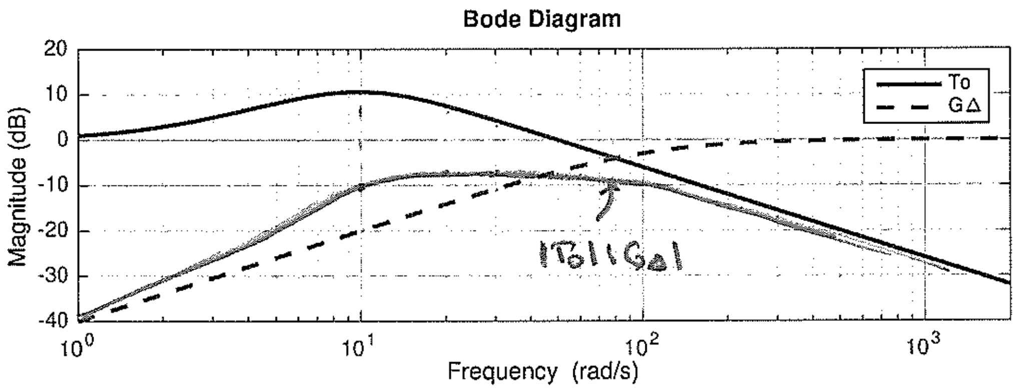
Certamen #2 – ELO270 – S2 2018

Soluciones

Problema 2.1 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Bode de magnitud de $T_o(s)$ y $G_\Delta(s)$. Estime las cotas de la magnitud de sensibilidad $S(s)$ de un lazo de control en función de la sensibilidad nominal $S_o(s)$ del lazo, es decir,*

$$a|S_o(j\omega)| \le |S(j\omega)| \le b|S_o(j\omega)|$$



Solución

A partir del gráfico se puede estimar el máximo de

$$|T_o G_\Delta|_{dB} = |T_o|_{dB} + |G_\Delta|_{dB} < -9 \text{ [dB] (aprox)}$$

$$\Rightarrow \quad |T_o G_\Delta| < \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{1}{3}$$

... y sabemos que

$$\frac{1}{1+|T_o G_\Delta|}|S_o| \le |S| \le \frac{1}{1-|T_o G_\Delta|}|S_o|$$

$$\frac{3}{4}|S_o| \le |S| \le \frac{3}{2}|S_o|$$

//

Problema 2.2 (10 puntos) *En un lazo de control estándar con un grado de libertad*

$$G_o(s) = \frac{1}{s-1} \qquad C(s) = 2$$

Se sabe además que la actuación está limitada a $|u(t)| \leq 1$. Determine si el controlador logra estabilizar la planta cuando la perturbación de salida es un escalón unitario (con condiciones iniciales iguales a cero).

Solución

→ Primero determinamos si se satura la actuación en $t = 0^+$

$$\frac{U}{D_o} = -S_{uo} \Rightarrow U = -S_{uo} D_o = -\frac{C}{1+G_oC} D_o$$

$$= \frac{-2}{1+\frac{2}{s-1}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{-2(s-1)}{s+1} \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow u(0^+) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = -S_{uo}(\infty) = -2$$

pero $|u(t)| \leq 1$ por tanto SI hay saturación inicialmente y la planta opera en lazo abierto.

→ Se puede analizar si sale (o no) de la saturación

→ Sin embargo, se puede analizar si el lazo alcanza el estado estacionario

Note que $u(\infty) = \lim_{s\to 0} sU(s) = -S_{uo}(0) = 2$

Lo cual NO es posible debido a la saturación

Por tanto el lazo no alcanza el punto de equilibrio y no se logra estabilizar la planta.

Problema 2.3 (10 puntos) *Considere una planta dada por su modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{2e^{-0,2s}}{0,5s+1}$$

Determine la implementación con anti-enrollamiento de un controlador PID estabilizante que garantice buen seguimiento de referencias de hasta 2 [rad/s].

Solución

- El PID estabilizante puede ser diseñado de diferentes formas, pero garantizando $B_w(T_0) \geq 2 \left[\frac{rad}{s}\right]$
- Por ejemplo, usando aproximación de Padé de orden 1

$$G_o(s) = \frac{2}{(0.5s+1)} \frac{(-0.1s+1)}{(+0.1s+1)} \Rightarrow n = 2$$

Se elige controlador bipropio y con integración $\Rightarrow r = 1$

Por tanto $n_c = n - 1 + r = 2 \Rightarrow C(s) = \dfrac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+l_0)}$

... que corresponde a un PID

- Aproximar el retardo por padé implica $B_w(T_0) < \frac{3}{T_d} = 7.5 \left[\frac{rad}{s}\right]$
- Asignación de polos: pueden cancelarse TODOS los polos de la planta, pero escribiéndolos en forma MÓNICA:

$$G_o(s) = \frac{4}{(s+2)} \frac{(-s+10)}{(s+10)} \quad y \quad C(s) = \frac{p_2(s+2)(s+10)}{s(s+l_0)}$$

$$\Rightarrow A_o L + B_o P = A_{cl}$$

$$(s+2)(s+10)s(s+l_0) + 4(-s+10)p_2(s+2)(s+10) = (s+2)(s+10)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)$$

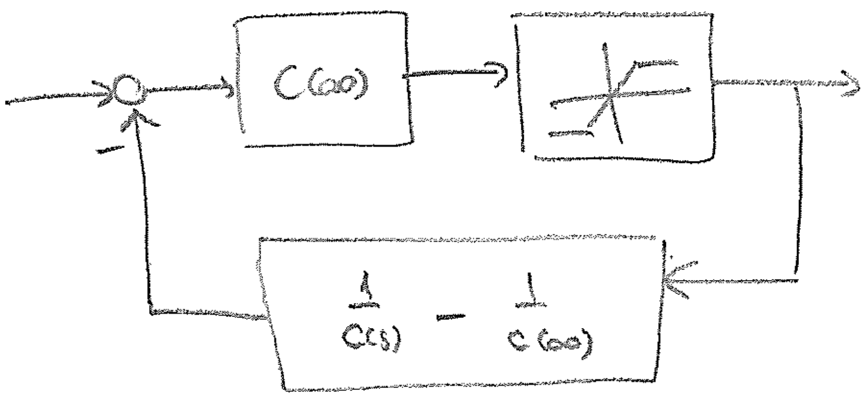
Eligiendo (por ejemplo) $\omega_n = 5$, $\xi = 0.7$ se logra $B_w(T_0) \approx 5$

$$\ldots \qquad s^2 + (l_0 - 4p_2)s + 40p_2 = s^2 + 7s + 25$$

$$\Rightarrow p_2 = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 6{,}125$$

$$\Rightarrow l_0 = 7 + 4 \cdot \frac{5}{8} = 9.5$$

esquema antienrollamiento es



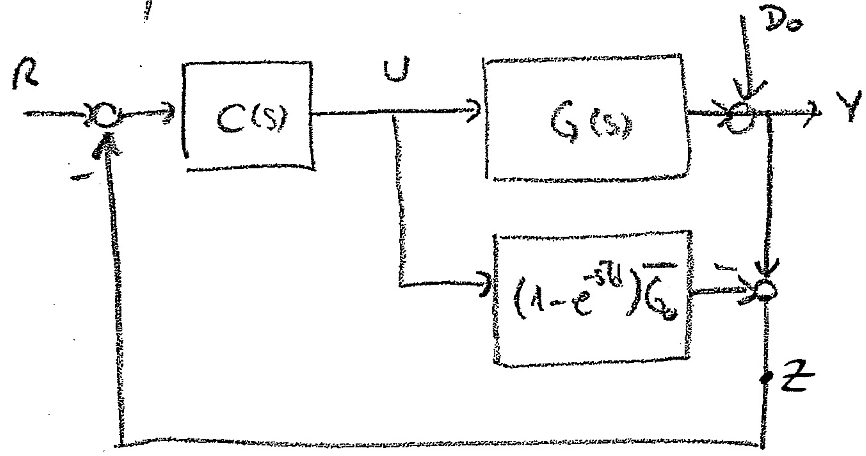
en que $C(s) = \dfrac{p_2 (s+2)(s+10)}{s(s+l_0)}$

$y \ C(\infty) = p_2$

Problema 2.4 (10 puntos) *Considere una planta estable con modelo nominal $G_o(s) = e^{-sT_d}\bar{G}_o(s)$, en que $\bar{G}_o(s)$ es racional y estable. Se diseña un esquema de control usando el predictor de Smith, pero la planta tiene modelo "verdadero" $G(s) \neq G_o(s)$. Determine la función de sensibilidad $S(s)$ del lazo.*

Solución

El esquema del Predictor de Smith es



La función de sensibilidad del lazo es

$$S(s) = \frac{Y(s)}{D_o(s)}$$

Para ello tenemos que

$$Y = D_o + GU$$
$$U = -CZ$$
$$Z = Y - (1-e^{-sT_d})\bar{G}_o U$$

$$\Rightarrow \quad U = -C\left(Y - (1-e^{-sT_d})\bar{G}_o U\right)$$
$$U\left(1 - (1-e^{-sT_d})\bar{G}_o C\right) = -CY$$

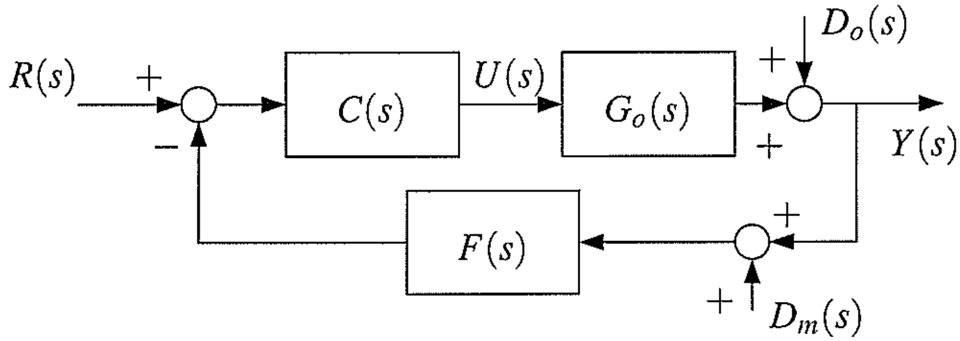
$$\Rightarrow \quad Y = D_o + G\left[\frac{-C}{1-(1-e^{-sT_d})\bar{G}_o C}\right] Y$$

$$\frac{Y}{D_o} = \frac{1}{1 + \dfrac{GC}{1-(1-e^{-sT_d})\bar{G}_o C}} = \frac{1-(1-e^{-sT_d})\bar{G}_o C}{1-(1-e^{-sT_d})\bar{G}_o C + GC}$$

Problema 2.5 (10 puntos) *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{e^{-0,1s}}{s+1}$$

Se desea buen seguimiento a una referencia de 6 [rad/s] y existe ruido de medición no despreciable para frecuencias mayores a 3 [rad/s]. Diseñe los bloques $C(s)$ y $F(s)$ en el sistema de control de la figura, indicando claramente cómo toma en cuenta la información disponible



Solución

A partir del enunciado hay dos requisitos de diseño

- seguimiento: $\frac{Y}{R} = \frac{G_oC}{1+G_oCF}$ debe tener $B_W \geq 6$

- inmunidad al ruido de medición: $\frac{Y}{D_m} = F\,\frac{G_oC}{1+G_oCF}$ debe tener $B_W \leq 3$

Por tanto se puede diseñar F(s) como pasa bajos y frecuencia de corte menor o igual a 3[rad/s]

$$\Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{\frac{s}{3}+1} = \frac{3}{s+3}$$

y luego diseñar C(s) para la planta "ampliada" (G_oF)

- Despreciando el retardo $\Rightarrow B_W(T_o) < \frac{1}{T_d} = 10$ [rad/s]

$\tilde{G}_oF = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{3}{s+3} \Rightarrow n=2$

C(s) bipropio y con integración $\Rightarrow r=1$

$\Bigg\}\ n_c = n-1+r = 2$

$\Downarrow$

$$C(s) = \frac{p_2s^2+p_1s+p_0}{s(s+l_0)}$$

$$A_0 L + B_0 P = A_{cl}$$

$$(s+1)(s+3)\,s(s+l_0) + 3p_2(s+1)(s+3) = (s+1)(s+3)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)$$

donde, por ejemplo, $\omega_n = 8$, $\xi = 0.75$ garantiza $Bw(T_0) \approx 8$

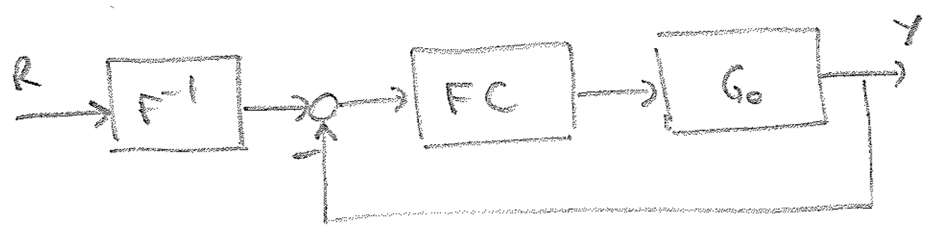
$$\Rightarrow \quad s^2 + l_0 s + 3p_2 = s^2 + 12s + 64$$

$$l_0 = 12$$

$$p_2 = \frac{64}{3} \approx 21.3$$

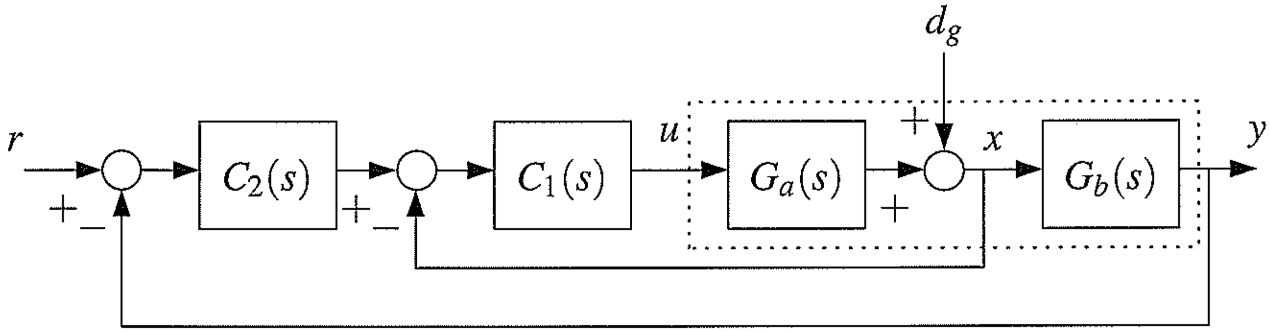
$$\rightarrow \quad C(s) = \frac{64(s+1)(s+3)}{3s(s+12)}$$

Alternativamente, el esquema propuesto se puede pensar como un esquema de <u>prealimentación de la referencia</u>:



$\tilde{C} = FC$ se diseña para que $Bw(\text{lazo}) \leq 3\ [\frac{rad}{s}]$ por el ruido de medición

y $H = F^{-1}$ se diseña para que Bw de seguimiento sea mayor que $6\ [rad/s]$



Problema 2.6 (10 puntos) *Diseñe los bloques del lazo de control en cascada de la figura, si se sabe que*

$$G_a(s) = \frac{-s+10}{(s-2)(s+5)} \qquad G_b(s) = e^{-s}$$

Solución

Para el lazo interno: cero de FNM $\Rightarrow B_w(T_{o1}) < 10$

polo inestable $\Rightarrow B_w(T_{o1}) > 2$

$G_a(s)$ es de orden $n = 2$

$C_1(s)$ bipropio c/integración $\Rightarrow r = 1$

$\Big\} \; n_c = n - 1 + r = 2$

$\Downarrow$

$$C_1(s) = \frac{p_{21}s^2 + p_{11}s + p_{01}}{s(s+l_{01})}$$

Se puede cancelar el polo estable de $G_a(s)$ con uno de los ceros de $C_1(s)$:

$$A_{o1} L_1 + B_{o1} P_1 = A_{cl1}$$

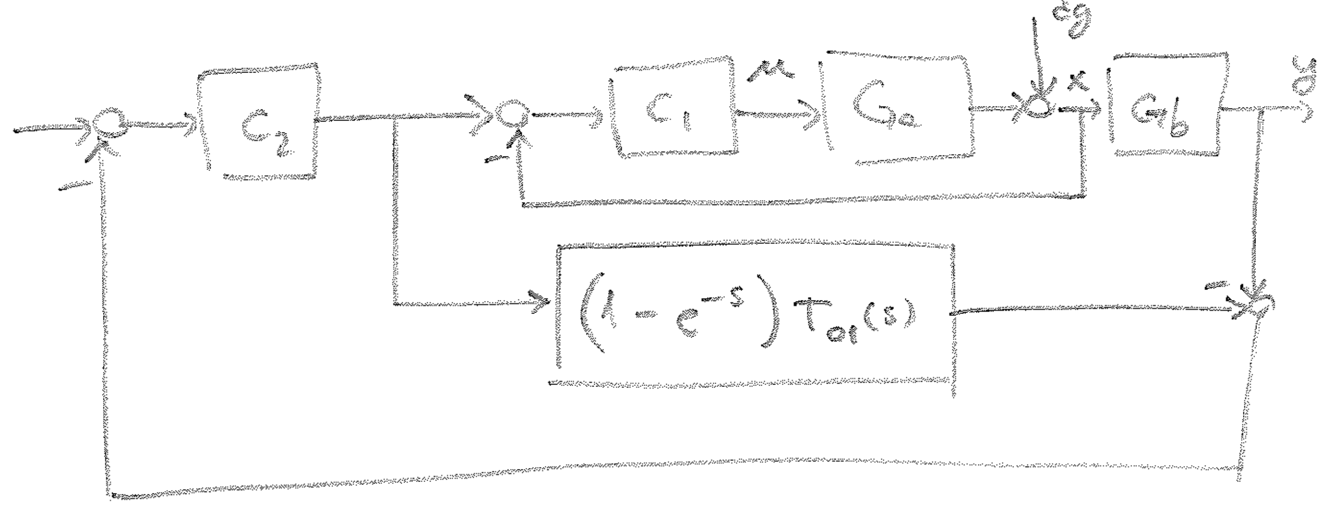
$$(s-2)(s+5)\, s(s+l_{01}) + (-s+10)(p_{21}s + p_{11})(s+5) = (s+5)^2(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

con $\omega_n = 5$, $\xi = 0.75$ se logra $B_w(T_{o1}) \approx 5$

Para el lazo externo se debe considerar el retardo en $G_b(s)$

- si se desprecia $\Rightarrow B_w(T_{o2}) < \frac{1}{\tau_d} = 1$
- si se usa Padé orden 1 $\Rightarrow B_w(T_{o2}) < \frac{3}{\tau_d} = 3$
- si se usa Smith, NO hay restricción de B_w y puede ser usado pues T_{o1} es estable

⇒ Esquema con predictor de Smith



en que $T_{01} = \dfrac{C_1 G_a}{1 + C_1 G_a} = \dfrac{B_{01}P_1}{A_{cl1}} = \dfrac{B_{02}}{A_{02}} = \dfrac{(-s+10)(p_{21}s+p_{11})}{(s+5)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

Note que $T_{01}(s)$ "hereda" el cero de FNM de G_a por tanto, para el diseño de $C_2(s)$ se debe tener en cuenta que $B_W(T_{02}) < 10$

T_{01} es de orden $n = 3$

C_2 bipropio con integración ⇒ $r = 1$

$n_c = n - 1 + r = 3$

⇓

$$C_2(s) = \frac{p_{32}s^3 + p_{22}s^2 + p_{12}s + p_{02}}{s(s^2 + l_{12}s + l_{02})}$$

C_2 puede cancelar TODOS los polos de $T_{01}(s)$ (son estables) y, si resulta estable, el cero dado por $(p_{21}s+p_{11})$

$$\Rightarrow A_{cl2} = A_{02}L_2 + B_{02}P_2 = (s+5)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)\left(s+\frac{p_{11}}{p_{21}}\right)\underbrace{\left[s(s+\tilde{l}_{02}) + \tilde{p}_{32}\,p_{21}(-s+10)\right]}_{\text{dos polos a asignar}}$$

tal que $B_W(T_{02}) < 10$