Nombre: Solución

JYE – 7 de enero de 2020

ELO270 – S2 2019 – Control #3 (*online*)

Problema 3.1 *Considere un sistema un lazo de control nominal con un grado de libertad en que*

$$C(s) = \frac{K(s+\alpha)}{s} \qquad G_o(s) = \frac{(-s+1)\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

en que $\omega_n > 0$ *y* $0 < \xi < 1$.

(a) *Determine las cuatro funciones de sensibilidad del lazo nominal.*

(b) *Determine si existen valores de* K *y* α *tal que el lazo nominal sea internamente estable. Fundamente claramente su respuesta.*

(c) *Si su respuesta anterior es positiva, haga un gráfico cualitativo de la respuesta a escalón unitario en la referencia del lazo comparada con la respuesta a escalón unitario de la planta, fundamentando claramente su respuesta.*

(d) *Determine el valor inicial de la actuación* $u(t)$ *cuando la referencia del lazo es un escalón unitario y las condiciones iniciales son cero.*

(e) *Determine si es posible elegir otro controlador* $C(s)$ *tal que el lazo sea internamente estable y que* $T_o(s) = \dfrac{1}{\tau s + 1}$.

(a) $$S_o(s) = \frac{1}{1+G_o(s)C(s)} = \frac{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}{A_{cl}(s)}$$

$$T_o(s) = \frac{G_oC}{1+G_oC} = 1 - S_o = \frac{K(s+\alpha)(-s+1)\omega_n^2}{A_{cl}(s)}$$

$$S_{io}(s) = \frac{G_o}{1+G_oC} = S_oG_o = \frac{s(-s+1)\omega_n^2}{A_{cl}(s)}$$

$$S_{uo}(s) = \frac{C}{1+G_oC} = S_oC = \frac{K(s+\alpha)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}{A_{cl}(s)}$$

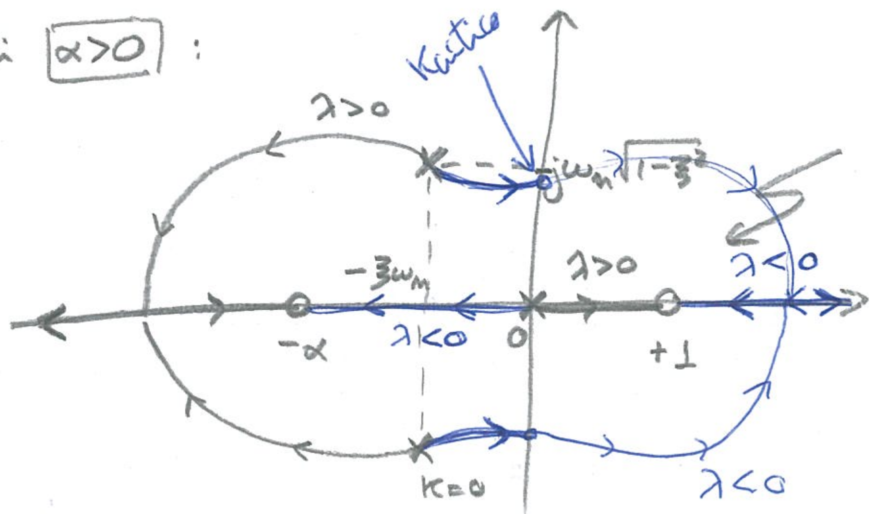
en que $A_{cl}(s) = s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2) + K(s+\alpha)(-s+1)\omega_n^2$

(b) Una posibilidad es obtener el arreglo de Routh y analizar si es posible tener toda la primera columna positiva. Alternativamente se puede hacer un análisis más cualitativo a través del LGR.

$$\boxed{\text{LGR}} \quad A_{cl}(s) = \underbrace{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}_{\substack{\text{polos en } p_1=0 \\ \text{y } p_{2,3}=-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}} + \overbrace{(-k)}^{\lambda}\underbrace{(s+\alpha)(s-1)\omega_n^2}_{\substack{\text{ceros en } c_1=-\alpha \\ \text{y } c_2=1}}$$

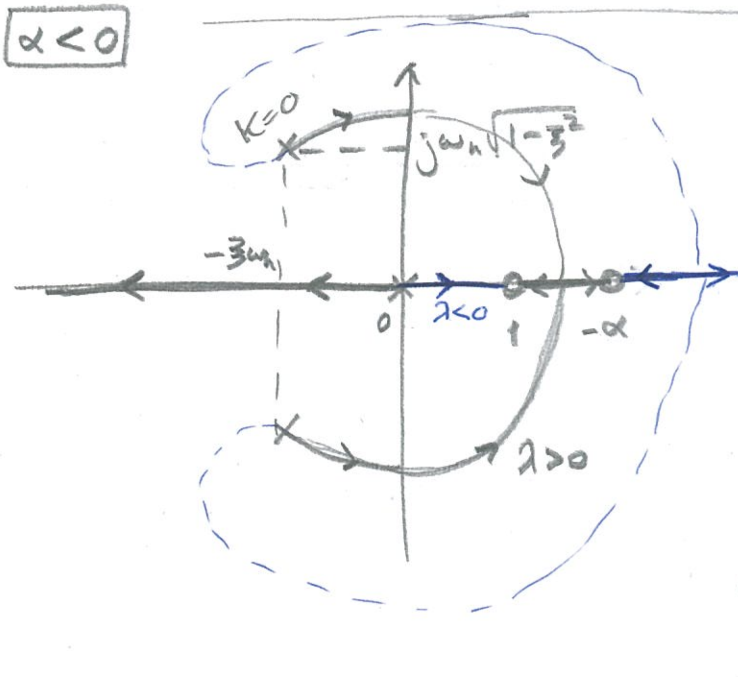
Podemos elegir α y el valor de K

Si $\boxed{\alpha>0}$:



- Note que para $K<0$ $(\lambda>0)$ SIEMPRE hay una raíz inestable entre 0 y 1
- Para $K>0$ $(\lambda<0)$ hay un rango de valores $\boxed{0<K<K_{crítico}}$ en que las TRES raíces de A_{cl} son estables

Si $\boxed{\alpha<0}$



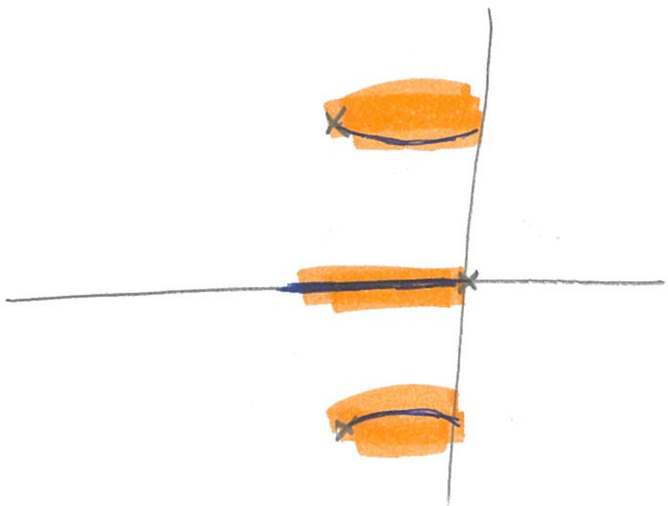
- Para $K<0$ $(\lambda>0)$ hay un rango de valores $(K_c)_2 < K < 0$ tal que las 3 raíces de A_{cl} están en el SPI abierto
- Para $K>0$ $(\lambda<0)$ siempre hay una raíz inestable entre 0 y 1 (o entre 0 y $-\alpha$, si $0<-\alpha<1$)

(c) Existen valores de K y α:

si $\alpha > 0 \Rightarrow 0 < K < (K_c)_1$

si $\alpha < 0 \Rightarrow (K_c)_2 < K < 0$

En AMBOS casos los polos de lazo cerrado se ubican (aproximadamente) en las zonas que muestra la figura:



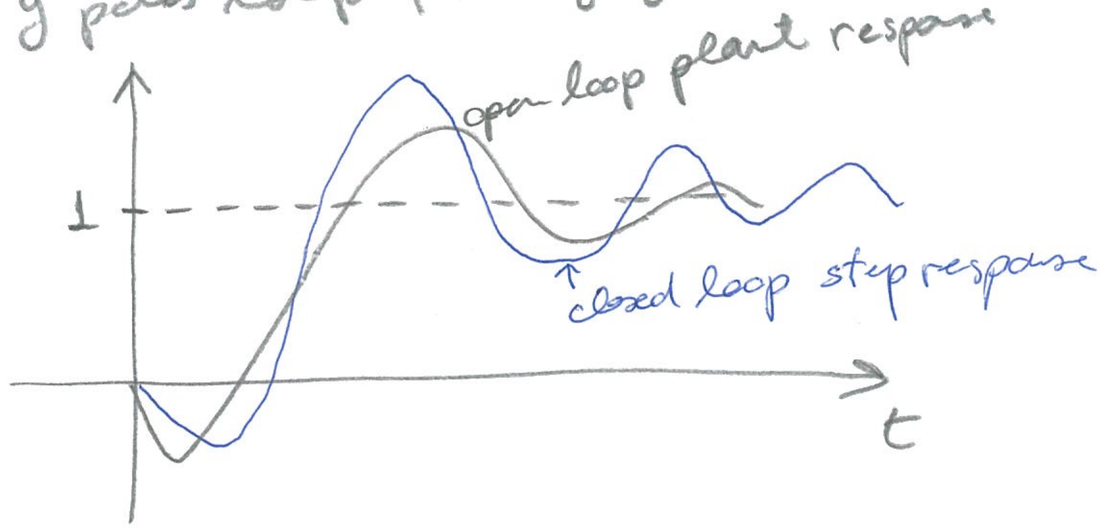
Por tanto: hay 2 polos de lazo cerrado complejos conjugados y con MENOR amortiguación que los de lazo abierto y hay un polo LENTO cerca de $s=0$.

$T_o(s)$ además debe preservar el cero de FNM

y $T_o(0)=1$ pues $C(0)=\infty$

La planta tiene ganancia a continua $G_o(0)=1$ tiene un cero de FNM (undershoot) y polos complejos conjugados.

$\Rightarrow$



(d) $u(0^+) = \lim_{s\to\infty} sU(s)$ cuando $R(s) = \frac{1}{s}$

$U(s) = S_{uo}(s) R(s)$

$\Rightarrow u(0^+) = \lim_{s\to\infty} S_{uo}(s) = K$

(e) NO es posible pues $T_o(s)$ debe preservar el cero FNM de $G_o(s)$ pues de otra forma este ha sido cancelado, generando un polo de lazo cerrado INESTABLE.

De hecho, tendríamos que:

$$S_{uo}(s) = \frac{T_o(s)}{G_o(s)} = \frac{1}{\tau s + 1} \cdot \frac{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}{\underbrace{(-s+1)}_{\text{polo inestable}}\omega_n^2}$$

por tanto $S_{uo}(s)$ es inestable.