# ELO270 – S2 2019 – Control #4 (*online*)

**Problema 4.1** *Considere una planta con modelo "verdadero"*

$$G(s) = \frac{K(-0{,}5s+1)}{s^2+\omega_n s+\omega_n^2}$$

*en que* $0 < \omega_n < 1$ *y* $K > 0$.

*(a) Grafique la respuesta a escalón unitario de la planta, con condiciones iniciales cero.*

*(b) En base a lo anterior, proponga un modelo **nominal** para la planta de la forma*

$$G_o(s) = \frac{K_o e^{-s\tau_o}}{\nu_o s+1}$$

*(c) Grafique los diagramas de Bode de* $G(s)$ *y de* $G_o(s)$ *y estime para qué frecuencias se puede considerar que* $|G_\Delta(j\omega)| << 1$.

*(d) Si se elige un controlador de la forma*

$$C(s) = \frac{K_p(\nu_o s+1)}{s}$$

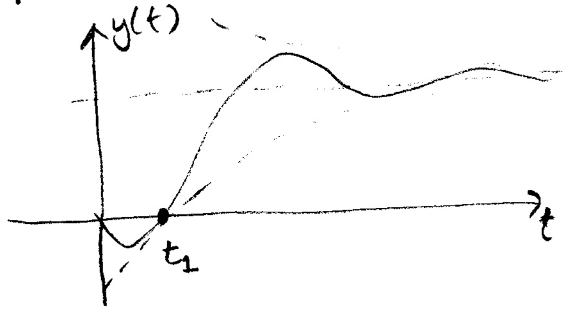
*elija* $K_p$ *de manera que, para el lazo **nominal**, el margen de ganancia* $M_g \geq 3$*[dB] y que el margen de fase* $M_\phi \geq \frac{\pi}{4}$.

*(e) Determine si con el controlador anterior el lazo "verdadero" es o no internamente estable.*

ELO 270, Q4 (online), 22/01/2020

$\boxed{\text{Solución}}$ :

a) La respuesta a escalón de la planta es de la forma

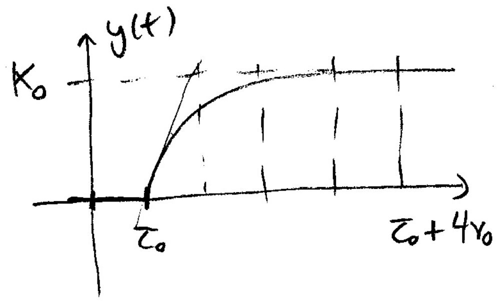



i) $y(\infty) = \frac{K}{\omega_n^2} = G(0)$

ii) oscila pues hay un par de polos complejos conjugados (con $\xi = \frac{1}{2}$)

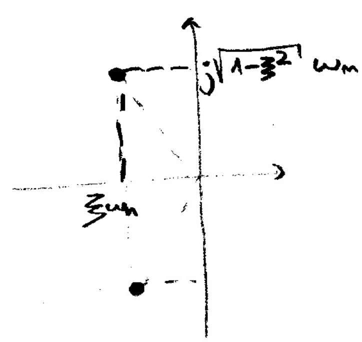
iii) tiene undershoot pues hay un cero de fase no mínima (FNM) / o cero "inestable" en $s = 2$

b) Para ajustar un modelo
$$G_0(s) = \frac{K_0\, e^{-\tau_0 s}}{\nu_0 s + 1}$$
tenemos que i) $K_0 = \frac{K}{\omega_n^2} = y(\infty)$




ii) $\nu_0$ se puede estimar usando la envolvente de la oscilación amortiguada de $G(s)$

$$e^{-\xi\omega_n t} \longrightarrow \nu_0 \approx \frac{1}{\xi\omega_n} \approx \frac{2}{\omega_n}$$




o bien directamente ancho de banda

$$\nu_0 \approx \frac{1}{\omega_n}$$

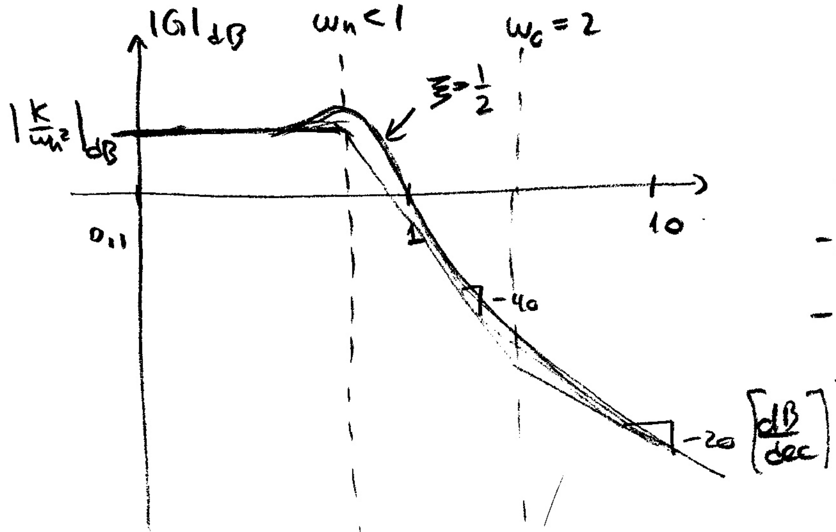
iii) el retardo $\tau_0$ se puede $\underline{\text{estimar}}$, suponiendo que el cero de fase no mínima corresponde a una aproximación de padé de un retardo

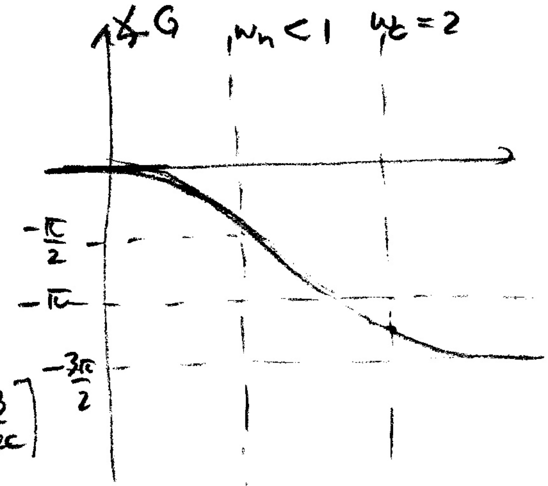
$$e^{-s\tau_0} \approx \frac{-\frac{\tau_0}{2}s+1}{\frac{\tau_0}{2}s+1} \Rightarrow \frac{\tau_0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau_0 \approx 1$$

* Alternativamente se podría buscar el punto $t = t_1$ de la respuesta de la planta "verdadera" ... $\tau_0 \approx 1$

c) Bode de $G(s) = \dfrac{\frac{K}{\omega_n^2}\left(-\frac{1}{2}s+1\right)}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{1}{\omega_n}s+1}$ $\Rightarrow \omega_c = 2$

$\Rightarrow \omega_n < 1$



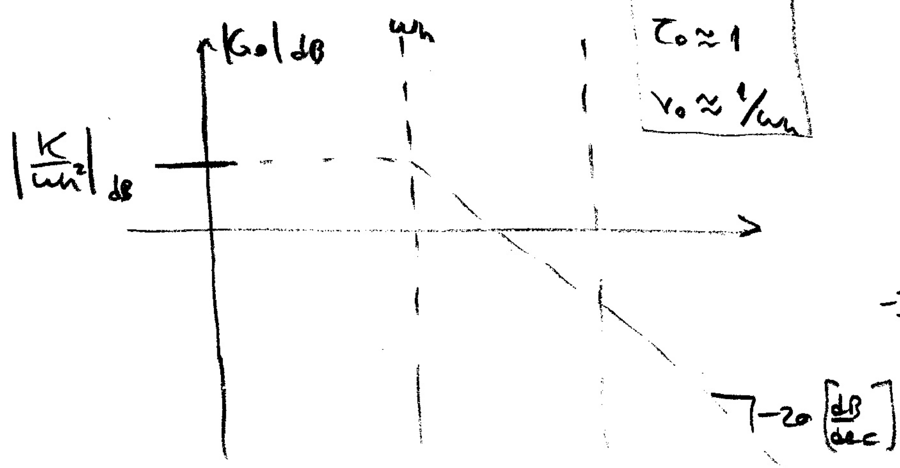



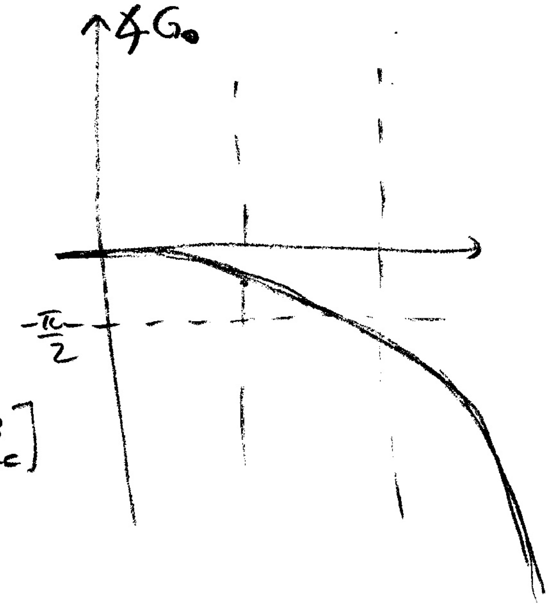

por su parte $G_o(s) = \dfrac{K_o\, e^{-s\tau_o}}{\nu_o s + 1} = \dfrac{K}{\omega_n^2} \cdot \dfrac{e^{-s}}{\frac{s}{\omega_n}+1}$ $\rightarrow$ efecto desde $\omega \approx 2$ (x Padé 1)

$K_o = \frac{K}{\omega_n^2}$

$\tau_o \approx 1$

$\nu_o \approx 1/\omega_n$




Para que $|G_\Delta(j\omega)| << 1$

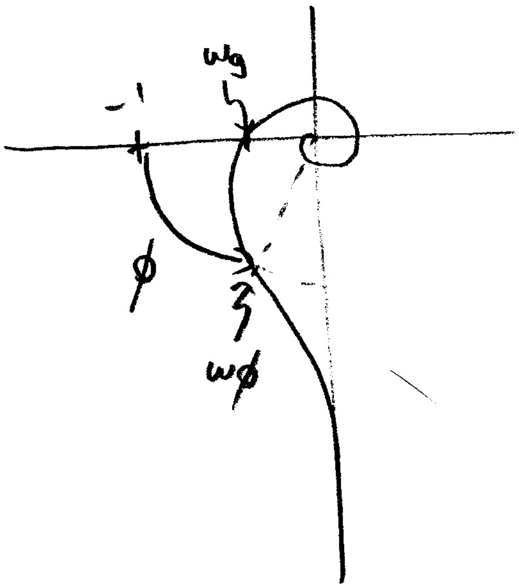
se requiere que $G(j\omega) \approx G_o(j\omega)$ (módulo y ángulo)

$\Rightarrow$ $|G(j\omega)| \approx |G_o(j\omega)|$

y $\measuredangle G(j\omega) \approx \measuredangle G_o(j\omega)$

por tanto, de los diagramas de Bode, se puede estimar que eso sucede SOLO para $\omega \leq \omega_n$

(d) Si $C = \frac{K_p(v_0 s+1)}{s} \Rightarrow G_0 C = \frac{K_0 K_p}{s} e^{-s\tau_0}$




$\underline{M_\phi}$ $|G_0 C| = 1 \iff \left| \frac{K_0 K_p}{j\omega} e^{-j\omega\tau_0} \right| = \frac{K_0 K_p}{\omega_g} = 1 \Rightarrow \omega_g = \frac{1}{K_0 K_p}$

$$\Rightarrow \measuredangle G_0 C|_{\omega=\omega_g} = \left| \frac{K_0 K_p}{j\omega_g} e^{-j\omega_g \tau_0} \right| = \left| \frac{1}{j} e^{-j\frac{\tau_0}{K_0 K_p}} \right|$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\tau_0}{K_0 K_p}$$

$$-\pi + \phi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\tau_0}{K_0 K_p}$$

$$\Rightarrow M_\phi = \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\tau_0}{K_0 K_p}$$

$\underline{M_g}$ $\measuredangle |G_0 C| = -\pi \iff \measuredangle G_0 C = \measuredangle \left( \frac{K_0 K_p}{j\omega} e^{-j\omega\tau_0} \right)$

$$= \measuredangle \left( \frac{K_0 K_p}{j\omega} \right) + \measuredangle \left( e^{-j\omega\tau_0} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} - \omega\tau_0 = -\pi$$

$$\Rightarrow \omega_\phi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau_0}$$

$$\Rightarrow |G_0 C|_{\omega=\omega_\phi} = \left| \frac{K_0 K_p}{j\omega_\phi} e^{-j\omega_\phi \tau_0} \right| = \frac{K_0 K_p}{\omega_\phi} = \frac{2\tau_0 K_0 K_p}{\pi}$$

$$\Rightarrow M_g = -20 \log \left( \frac{2\tau_0 K_0 K_p}{\pi} \right)$$

$$\Rightarrow \quad M_g \geq 3\,dB \iff \frac{2\tau_0 K_0 K_p}{\pi} \leq 0.7 \quad \left(\approx \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$K_p \leq \frac{0.7\cdot\pi}{2}\;\frac{1}{\tau_0 K_0} \approx \frac{1}{\tau_0 K_0}$$

$$M_\phi \geq \frac{\pi}{4} \iff \frac{\pi}{2} - \frac{\tau_0}{K_0 K_p} \leq \frac{\pi}{4}$$

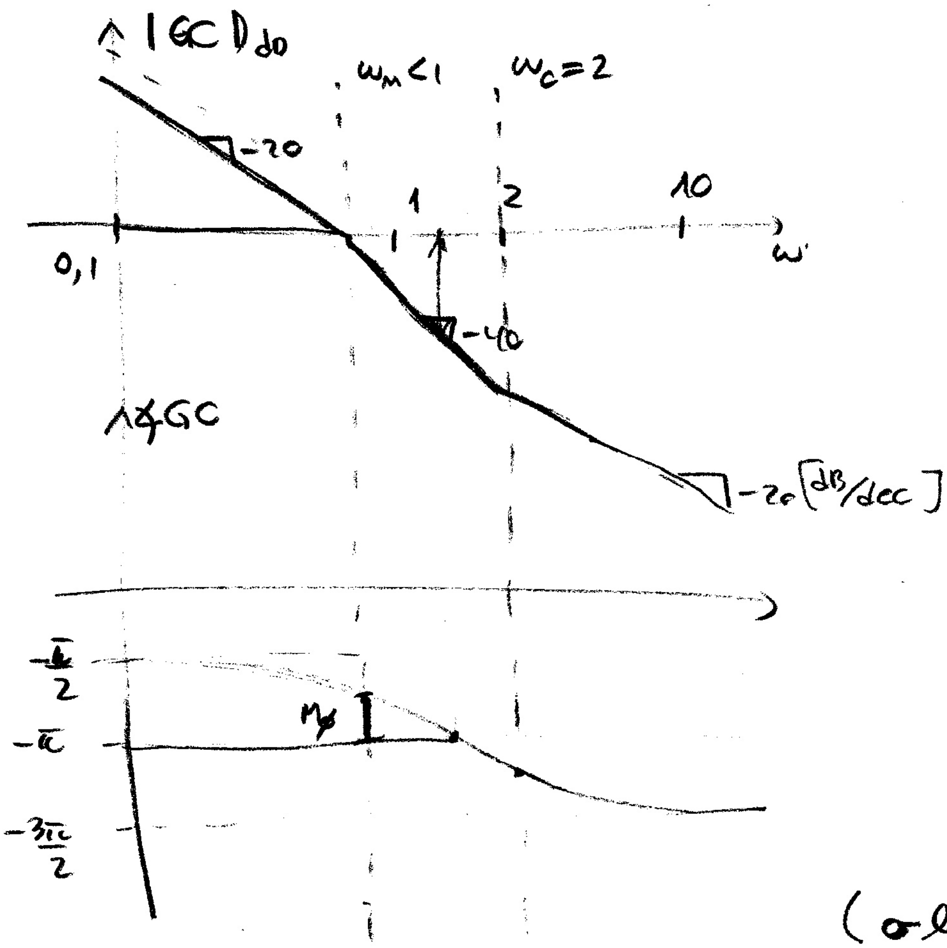
$$\frac{\pi}{4} \leq \frac{\tau_0}{K_0 K_p}$$

$$\Rightarrow \quad K_p \leq \frac{4}{\pi}\,\frac{K_0}{\tau_0} \approx 0.75\,\frac{1}{\tau_0 K_0}$$

Si usamos $\left\{\begin{array}{l} K_0 = \frac{K}{\omega_m^2} \\ \tau_0 \approx 1 \end{array}\right. \Rightarrow \quad K_p \leq 0.75\,\frac{\omega_m^2}{K}$

e) La transferencia del lazo "verdadero" es

$$GC = \frac{0.75\,\cancel{\frac{\omega_m^2}{K}}\left(\frac{s}{\omega_n}+1\right)}{s}\;\cancel{\frac{K}{\omega_m^2}}\;\frac{\left(-\frac{s}{2}+1\right)}{\frac{s^2}{\omega_n^2}+\frac{s}{\omega_n}+1} \qquad \begin{array}{l} \leftarrow \omega_c = 2 \\ \leftarrow \omega_m < 1 \end{array}$$




Se aprecia que el $M_g$ y $M_\phi$ del lazo verdadero son $> 0$

$\Downarrow$

lazo estable

(o lo que lo mismo, el Nyquist NO encierra al $(-1,0)$)