ELO270 – S2 2019 – Control #5 (*online*)

Problema 5.1 *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{K_o\, e^{-s\tau_o}}{s + a_o}$$

en que $a_o > 0$, $K_o > 0$ *y* $\tau_o \approx \frac{1}{2a_o}$.

(a) Si se aplica el método de oscilación, determine aproximadamente la ganancia crítica K_c *y la frecuencia de dicha oscilación* ω_c *(*Sugerencia: use la aproximación de Pade para el retardo*).*

(b) Proponga un controlador PI o PID que garantice estabilidad del lazo cerrado y buen seguimiento a referencias de hasta $3a_o$ *[rad/s].*

(c) Para el sistema de control obtenido, determine la salida de la planta en estado estacionario para una perturbación de entrada $d_i(t) = 1 + \cos(a_o t)$.

(a) Si se aplica la aproximación de Padé tenemos que

$$G_0(s) \approx \frac{K_0\left(1 - s\frac{\tau_0}{2}\right)}{(s+a_0)\left(1 + s\frac{\tau_0}{2}\right)}$$

En el método de oscilación se usa un controlador proporcional $C(s) = K_p$ y se incrementa la ganancia hasta obtener una oscilación sostenida.

Dicha ganancia crítica se puede obtener del polinomio de lazo cerrado

$$A_{cl}(s) = (s+a_0)\left(1 + s\frac{\tau_0}{2}\right) + K_p K_0\left(1 - s\frac{\tau_0}{2}\right)$$

$$= \frac{\tau_0}{2}s^2 + \left(a_0\frac{\tau_0}{2} + 1 - K_p K_0\frac{\tau_0}{2}\right)s + K_p K_0 + a_0$$

Este polinomio tiene <u>raíces imaginarias</u> (en el eje $j\omega$)

$$\Leftrightarrow\ a_0\frac{\tau_0}{2} + 1 - K_p K_0\frac{\tau_0}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow\ K_p = \frac{1}{K_0}\left(a_0 + \frac{2}{\tau_0}\right)$$

La frecuencia de oscilación se obtiene del polinomio de lazo cerrado resultante para dicha ganancia crítica

$$A_{cl}(s) = \frac{\tau_0}{2}s^2 + 0\,s + K_p K_0 + a_0$$

$$= \frac{\tau_0}{2}\left(s^2 + \left(\frac{1}{K_0}\left(a_0 + \frac{2}{\tau_0}\right)K_0 + a_0\right)\frac{2}{\tau_0}\right)$$

$$= \frac{\tau_0}{2}\left(s^2 + \underbrace{4\left(a_0 + \frac{1}{\tau_0}\right)\frac{1}{\tau_0}}_{(\omega_{osc})^2}\right)$$

$$\omega_{osc} = 2\sqrt{\left(a_0 + \frac{1}{\tau_0}\right)\frac{1}{\tau_0}}$$

$$\approx 2\sqrt{(a_0 + 2a_0)2a_0}$$

$$\approx 2\sqrt{6}\,a_0$$

(*) Mismo resultado se obtiene analizando $A_{cl}(s)$ mediante Routh.

(b) • Si se desprecia el retardo se introduce error de modelado NO despreciable a contar de $\omega = \frac{1}{\tau_0} \approx 2a_0$.

• Sin embargo se requiere que el ancho de banda de $T_0(s)$ sea al menos $3a_0$. Por tanto no se podría garantizar estabilidad robusta (no se cumple $|T_0 G_\Delta| < 1$, para todo ω)

• Por tanto se debe usar aproximación de Padé (para $\omega = \frac{3}{\tau_0} \approx 6a_0$) o el predictor de Smith (pues G_0 es estable).

• Usando Padé: $G_0(s) \approx \frac{K_0}{(s+a_0)} \frac{\left(1 - \frac{s\tau_0}{2}\right)}{\left(1 + \frac{s\tau_0}{2}\right)} = \frac{-K_0\left(s - \frac{2}{\tau_0}\right)}{(s+a_0)\left(s + \frac{2}{\tau_0}\right)}$

el orden es $\boxed{n=2}$ e incluimos integración en $C(s) \Rightarrow \boxed{r=1}$

$\Rightarrow \boxed{n_c = n - 1 + r = 2}$, es decir usaremos un PID:

$$C(s) = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+\ell_0)}$$

Ecuación de asignación: $A_{cl} = A_0 L + B_0 P$

$$\Rightarrow (s+a_0)\left(s+\frac{2}{\tau_0}\right) s (s+\ell_0) - K_0\left(s - \frac{2}{\tau_0}\right)(p_2 s^2 + p_1 s + p_0) = A_{cl}^*(s)$$

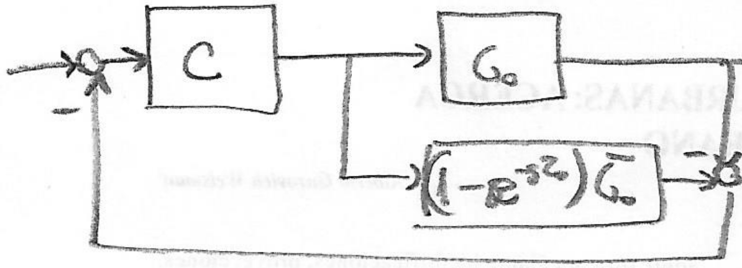
[Note que, dado que se tiene sólo $B_u(\tau_0)$, se podría forzar dos cancelaciones ESTABLES: $(s+a_0)\left(s+\frac{2}{\tau_0}\right)$]

$$A_{cl}^*(s) = \underbrace{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}_{\text{polos dominantes}}\underbrace{\left(s + \frac{2}{\tau_0}\right)}_{\approx 4a_0}(s + 5a_0) \leftarrow \text{uno posible}$$

$\xi \approx 0.7$

$\omega_n \approx 3a_0$

(b) Alternativamente se podría usar el predictor de Smith (*) ③



Se diseña $C(s)$ sólo considerando $\bar{G}_o = \frac{K}{s+a_0}$ (la parte racional de la planta)

Note que $\boxed{n=1}$ y $\boxed{r=1}$ (integración en el controlador), por tanto basta diseñar un controlador PI:

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s}$$

Asignación polos: $\bar{A}_o L + \bar{B}_o P = A_{cl}$

$$(s+a_0)s + K(p_1 s + p_0) = (s+3a_0)(s+5a_0)$$

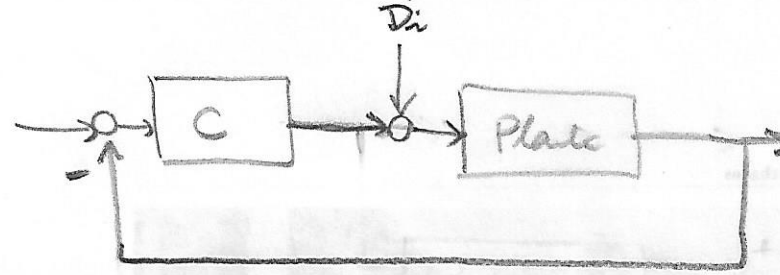
[o bien se podría tener una cancelación estable del polo dominante pues sólo interesa $\bar{B}_o(s)$: escoger $A_{cl}(s) = (s+3a_0)(s+a_0)$]

Se resuelve para obtener $p_1 = 7a_0/K$

y $p_0 = \frac{15a_0^2}{K}$ (por ejemplo)

(*) Estrictamente hablando el así obtenido no es un controlador PI "puro" sino que es un predictor de Smith que incluye el controlador PI como uno de sus bloques.

(C)



$$C = \frac{p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{s(s+l_0)} \qquad \text{Planta: } G_0 = \frac{K}{s+a_0} e^{-s\tau_0}$$

$d_i(t)$ tiene una componente DC $\quad d_{i1}(t) = 1$

y una componente de frecuencia $\omega = a_0 \quad d_{i2}(t) = 1\cos(a_0 t)$

Para ambos casos usamos la función de sensibilidad de entrada:

$$S_{io} = \frac{Y}{D_i} = \frac{G_0}{1+CG_0}$$

a DC) $$S_{io}(0) = \frac{K/a_0}{1+\infty\cdot K/a_0} = 0 \Rightarrow y_{1\infty} = 0$$

a frecuencia $\omega = a_0$)

$$C(ja_0) = \frac{-p_2 a_0^2 + jp_1 a_0 + p_0}{ja_0(ja_0+l_0)} = |C(ja_0)| \angle C(ja_0)$$

$$\Rightarrow y \quad G_0(ja_0) = \frac{K}{ja_0+a_0} e^{-ja_0\tau_0} = \frac{K}{a_0(j+1)} e^{-j\frac{1}{2}}$$

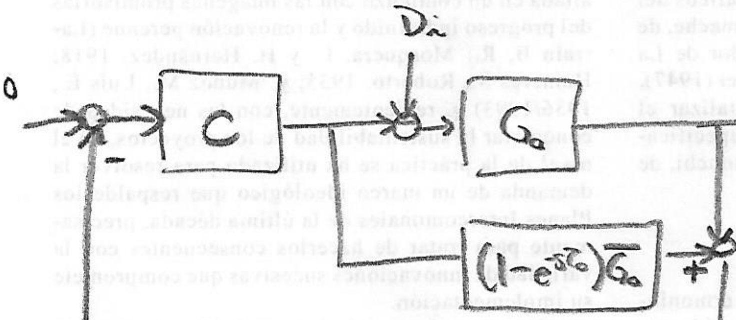
$$\Rightarrow S_{io}(ja_0) = \left.\frac{G_0}{1+G_0C}\right|_{s=ja_0} = |S_{io}(ja_0)| \angle S_{io}(ja_0)$$

$$\Rightarrow y_{2\infty} = |S_{io}(ja_0)| \cos(a_0 t + \angle S_{io}(ja_0))$$

$$\Rightarrow y(\infty) = \cancel{y_{1\infty}}^{\,0} + y_{2\infty}$$

(c) Similar resultado se obtiene calculado primero

$S_{io} = \frac{Y}{D_i}$ en el esquema del predictor de Smith



$$S_{io} = \frac{Y}{D_i} = \frac{G_o}{1+L} \leftarrow L = C\left(G_o + (1-e^{-s\tau_o})\bar{G}_o\right) = C\bar{G}_o$$

$$= \frac{\bar{G}_o e^{-s\tau_o}}{1+\bar{G}_o C}$$

a DC

$$S_{io}(0) = \frac{K/a_o}{1+K/a_o \cdot \infty} \cdot 1 = 0$$

a $\omega = j a_o$

$$S_{io}(ja_o) = \frac{\frac{K}{a_o j+1}}{1+\frac{K}{a_o j+1} C(j a_o)} e^{-j a_o \tau}$$

$$= |S_{io}(ja_o)| \angle S_{io}(ja_o)$$

$$\Rightarrow y(\infty) = \underbrace{0}_{y_{1\infty}} + \underbrace{|S_{io}(ja_o)| \cos(a_o t + \angle S_{io}(ja_o))}_{y_{2\infty}}$$