Soluciones

ELO270 – S2 2019 – Examen Final Fase I (online)

Problema 1.1 *Considere un sistema con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ definido por la ecuación diferencial*

$$A\frac{dy(t)}{dt} = B[u(t-C)]^2 - Dy(t)$$

en que A,B,C,D son constantes positivas. Haga un gráfico cualitativo aproximado de $y(t)$ cuando la entrada pasa del valor $u(t)=1$ para $t<0$, al valor $u(t)=2$ para $t>0$.

Puede considerarse $u_Q = 1$ como punto de operación

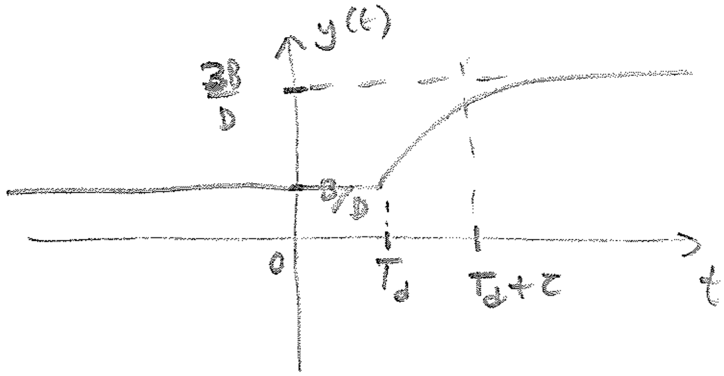
$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dt}\right|_Q = 0 \Rightarrow Bu_Q - Dy_Q = 0 \Rightarrow y_Q = \frac{B}{D}$$

linealizando

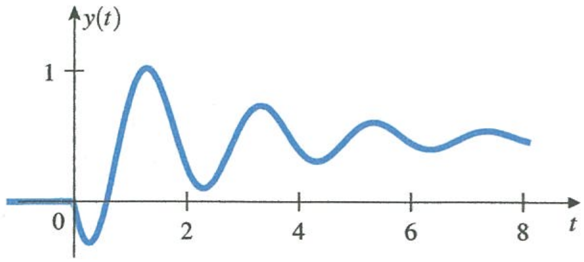
$$A\frac{d\Delta y}{dt} = \cancel{B}\left(u_Q + 2u_Q\,\Delta u(t-C)\right) - D\left(y_Q + \Delta y(t)\right)$$

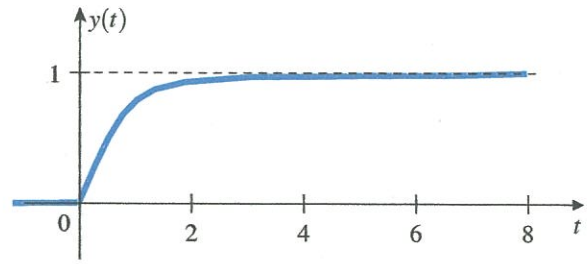
$$A\frac{d\Delta y}{dt} = 2B\,\Delta u(t-C) - D\,\Delta y$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{\mathcal{L}\{\Delta y\}}{\mathcal{L}\{\Delta u\}} = \frac{2B}{As+D}e^{-sC} \qquad \left\{ \begin{array}{l} G(0) = \frac{2B}{D} \\ \tau = A/D \\ T_d = C \end{array} \right.$$



Problema 1.2 *La figura izquierda muestra la respuesta a un escalón unitario $\mu(t)$ de una planta (lineal e invariante en el tiempo). Determine, si es posible, un controlador de lazo abierto que permita obtener una respuesta a un escalón unitario de referencia como la de la figura derecha.*





Note que la planta muestra undershoot, por tanto tiene un cero de fase no mínimo ("inestable") que NO puede ser cancelado por el controlador de lazo abierto, pues sería inestable

Dicho cero NO aparece en la respuesta a escalón de la derecha.

$\therefore$ NO existe controlador.

Problema 1.3 *Considere un lazo de control estándar en que*

$$G_o(s) = \frac{-s+c}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

en que $c > 0$, $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$ *y* $K_p > 0$. *Haga un diagrama de como se mueven los polos de lazo cerrado cuando* $0 \leq K_i < \infty$.

Note que

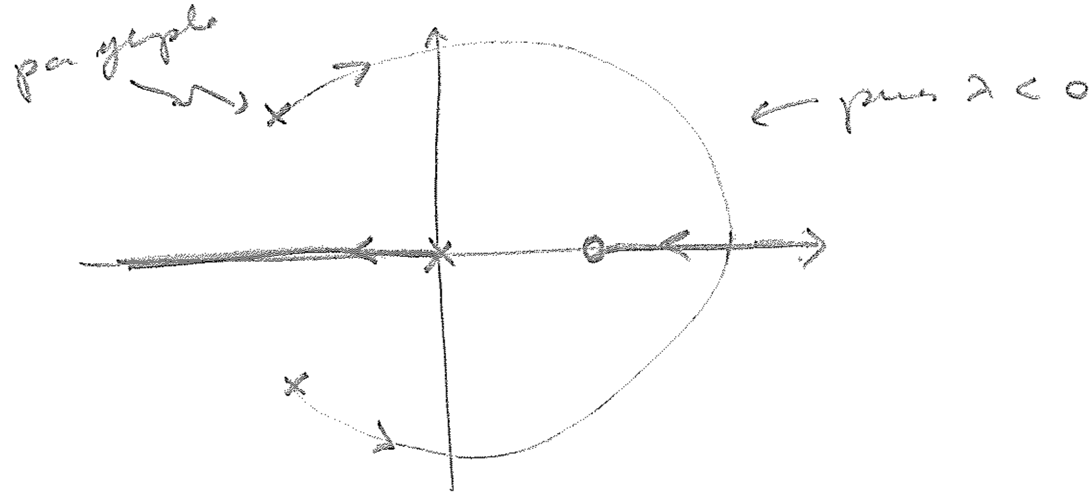
$$A_{cl}(s) = \underbrace{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}_{A_o}\underbrace{s}_{L} + \underbrace{(-s+c)}_{B_o}\underbrace{(K_p s+K_i)}_{P}$$

$$= s^3 + 2\xi\omega_n s^2 + \omega_n^2 s - s^2 K_p + cK_p s + K_i(-s+c)$$

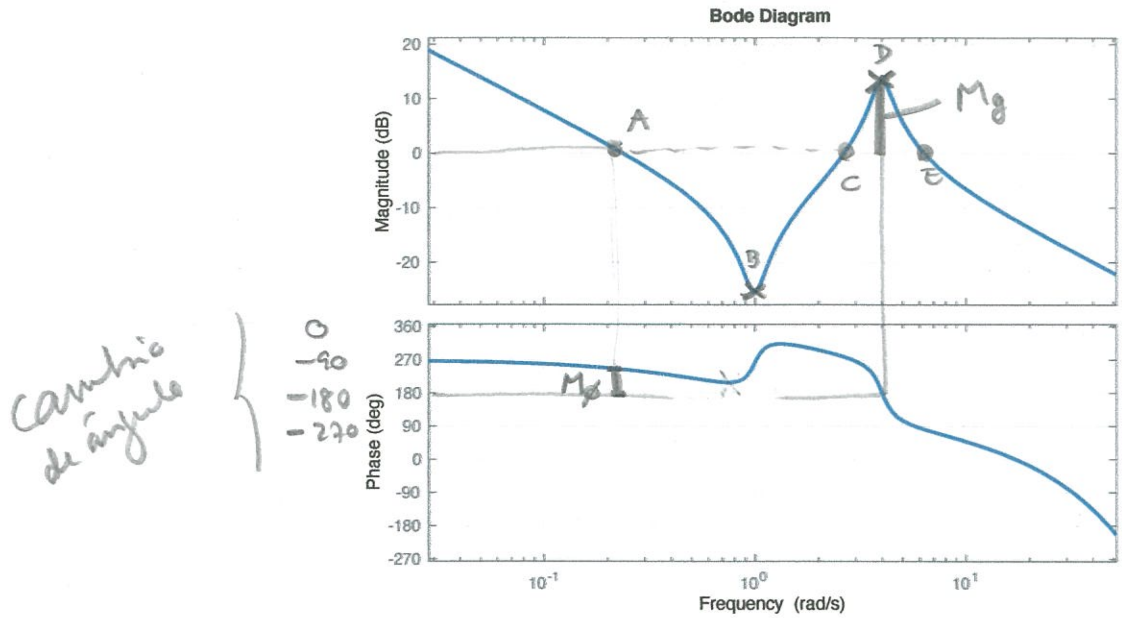
$$= \underbrace{s\left(s^2 + (2\xi\omega_n - K_p)s + \omega_n^2 + cK_p\right)}_{D(s)} + \underbrace{(-K_i)}_{\lambda}\underbrace{(s-c)}_{N(s)}$$

"polos" en $s=0$ y 2 polos más

"cero" en $s=c$



Problema 1.4 *La figura muestra el diagrama de Bode de una transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$ sin cancelaciones inestables. Determine, si es posible, si el lazo cerrado es o no internamente estable.*

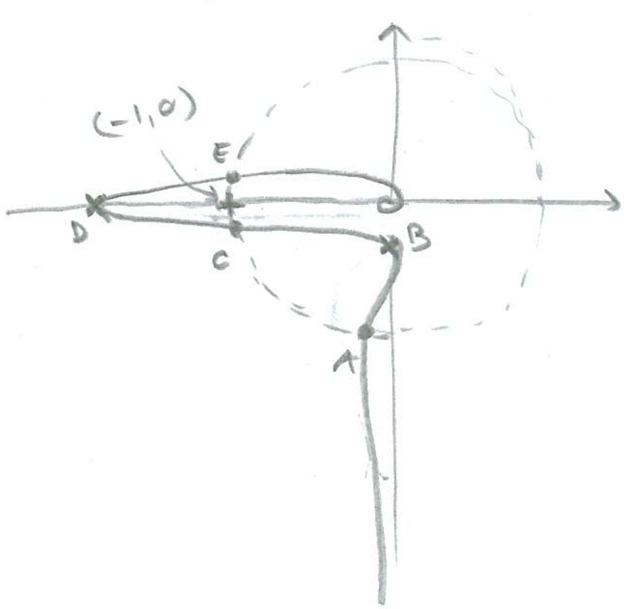


De la figura se aprecia que $M_\phi > 0$ margen de fase

pero $M_g < 0$ margen de ganancia

Pero no se indica si $G_o C$ tiene o no polos en el SPD abierto

De hecho, se puede dibujar aproximadamente el diagrama de Nyquist:



donde se aprecia que $N = 2$ pero no se conoce el valor de P.

Problema 1.5 *Considere una planta con modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{\omega_o^2}{s^2 + \omega_o^2}$$

Determine si es posible estabilizarla mediante un controlador PI.

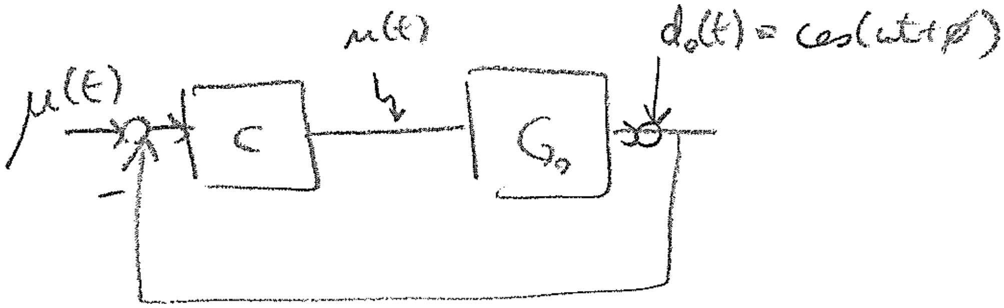
$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \Rightarrow A_{cl}(s) = A_o L + B_o P$$

$$= (s^2 + \omega_o^2)s + (p_1 s + p_0)\omega_o^2$$

$$= s^3 + \omega_o^2(p_1 + 1)s + p_0\omega_o^2$$

Note que el coeficiente de s^2 es cero, por tanto el lazo es inestable.

Problema 1.6 *Considere un lazo de control usual formado por una planta con modelo nominal $G_o(s)$ y un controlador estabilizante $C(s)$. El actuador impone una restricción $|u(t)| \leq U_{\text{máx}}$. Determine qué condición debe cumplirse para que, en estado estacionario, no haya saturación en la actuación cuando la referencia $r(t)$ es un escalón unitario y la perturbación de salida es $d_o(t) = \cos(\omega t + \phi)$.*



Podemos calcular la máxima amplitud de $u(t)$ usando superposición:

$\underline{\omega = 0}$ $r(t) = \mu(t)$

Entonces la amplitud de $u(t)$ será $|S_{uo}(0)|$

pues $U(s) = S_{uo}(s)\, R(s)$ y $R(s)$ es constante en e.e.

$\underline{\omega}$ $d_o(t) = \cos(\omega t + \phi)$ tiene amplitud 1

Entonces, en e.e., la amplitud de $u(t)$ será también $|S_{uo}(j\omega)|$

$\Rightarrow$ la máxima amplitud de $u(t)$ será entonces

$$\boxed{|S_{uo}(0)| + |S_{uo}(j\omega)| \leq U_{\text{máx}}}$$

es la condición que debe cumplirse.

(el e.e. existe pues se dice que el lazo es ESTABLE)

Problema 1.7 *Considere una planta con modelo nominal*

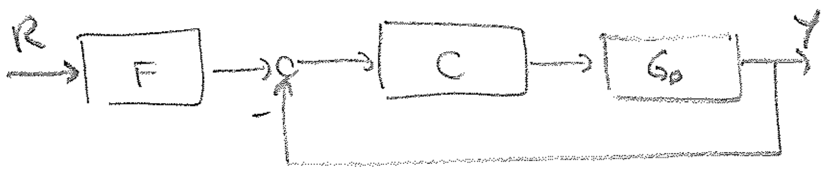
$$G_o(s) = \frac{e^{-0,2s}}{5s+1}$$

Se desea buen seguimiento a una referencia de 6 [rad/s] y existe ruido de medición no despreciable para frecuencias mayores a 3 [rad/s]. Diseñe un sistema de control, indicando claramente cómo toma en cuenta la información disponible.

$B_w(T_o) > 6$ para seguimiento

$B_w(T_o) < 3$ por ruido de medición

Son requisitos incompatibles en un lazo con 1 grado de libertad: usamos prealimentación de referencia:



- $C(s)$ se diseña para un lazo de $B_w < 3$ (y se puede despreciar el retardo pues $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.2} = 5$)

$$\left.\begin{matrix} m=1 \\ r=1 \end{matrix}\right\} m_c = 1$$

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_0}{s} \qquad G_o = \frac{0.2}{s+0.2}$$

$$A_{cl} = s(s+0.2) + 0.2(p_1 s + p_0) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\xi \approx 0.7;\ \omega_n \approx 3$$

$$\Rightarrow p_1 = \ldots$$
$$p_0 = \ldots$$

- $F(s)$ se diseña para que $\frac{Y}{R}$ tenga $B_w > 6$

$$\frac{Y}{R} = F\frac{CG_o}{1+CG_o} \Rightarrow F \approx \left(\frac{G_oC}{1+G_oC}\right)^{-1}$$

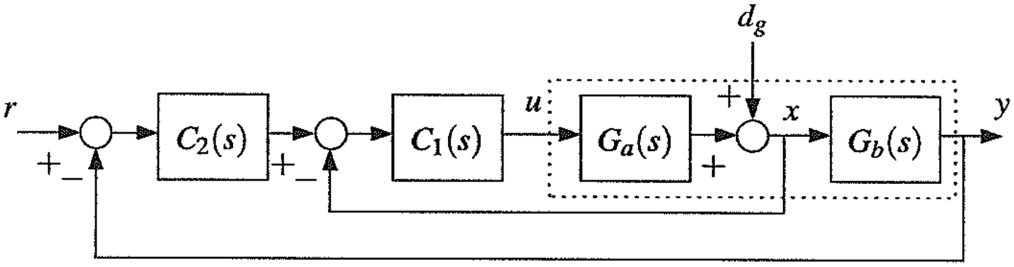
$$\left[\frac{(p_1 s+p_0)0.2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right]^{-1}\frac{1}{\tau s+1}$$

$$\frac{1}{\tau} = \omega_c > 6$$

Problema 1.8 *En el lazo de control en cascada de la figura,*

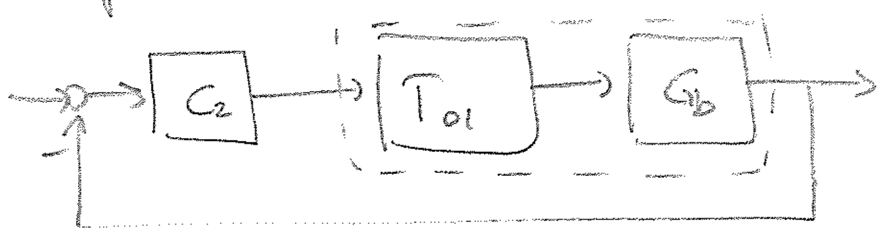
$$C_2(s) = \frac{2s+2a}{s} \qquad C_1(s) = 2a \qquad G_a(s) = \frac{1}{s-a} \qquad G_b(s) = \frac{1}{s}$$

en que $a > 0$. Determine si el lazo es internamente estable.



El lazo interno $\quad T_{01} = \dfrac{C_1 G_a}{1+C_1 G_a} = \dfrac{2a}{s-a+2a} = \dfrac{2a}{s+a}$

$\Rightarrow$ Se puede hacer la equivalencia



$A_{cl} = A_0 L + B_0 P$ en que $\quad C_2 = \dfrac{P}{L} = \dfrac{2(s+a)}{s} \qquad T_{01} G_b = \dfrac{B_0}{A_0} = \dfrac{2a}{s(s+a)}$

$= s^2(s+a) + 4a(s+a)$

$= (s^2+4a)(s+a)$

$\Rightarrow$ raíces en $s = \pm 2j\sqrt{a}$

$s = -a$

es <u>inestable</u>.