Solución

ELO270 – S2 2019 – Examen Final Fase 2 (online)

Problema 1.1 *Considere una planta con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ definido por la ecuación diferencial*

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0\sqrt{y(t)} = b_1 u(t) + b_0$$

en que a_0, b_0, b_1 son constantes positivas.

Proponga un sistema de control que permita seguimiento estacionario perfecto a referencias tipo escalón en torno a un valor $r_Q > 0$.

Una posibilidad es linealizar y luego diseñar un controlador adecuado.

$r_Q = y_Q$ determina el punto de operación:

$$\underbrace{\cancel{\frac{d}{dt} y_Q}}_{0} + \boxed{a_0\sqrt{y_Q} = b_1 u_Q + b_0}$$ donde se obtiene u_Q

El modelo lineal local es $\begin{cases} \Delta y = y - y_Q \\ \Delta u = u - u_Q \end{cases}$

$\Rightarrow$ Taylor 1er orden

$$\frac{d}{dt}\Delta y + a_0\left(\sqrt{y_Q} + \frac{1}{2\sqrt{y_Q}}\Delta y\right) = b_1(\Delta u + u_Q) + b_0$$

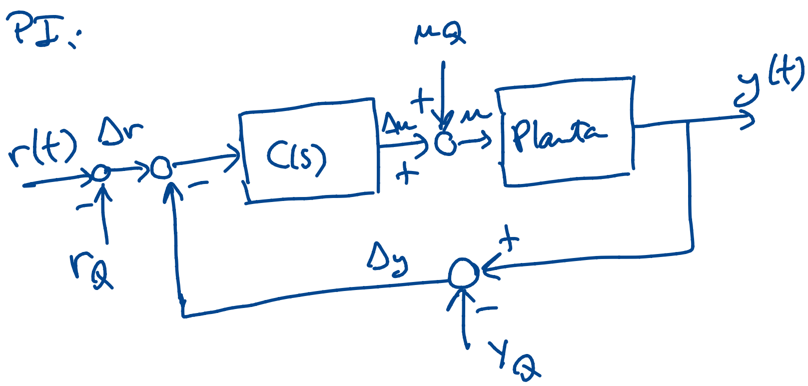
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\Delta y + \frac{a_0}{2\sqrt{y_Q}}\Delta y = b_1 \Delta u}$$ (usando ecuación de (u_Q, y_Q))

$$\Rightarrow \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b_1}{s + \frac{a_0}{2\sqrt{y_Q}}}$$ ¡es estable!

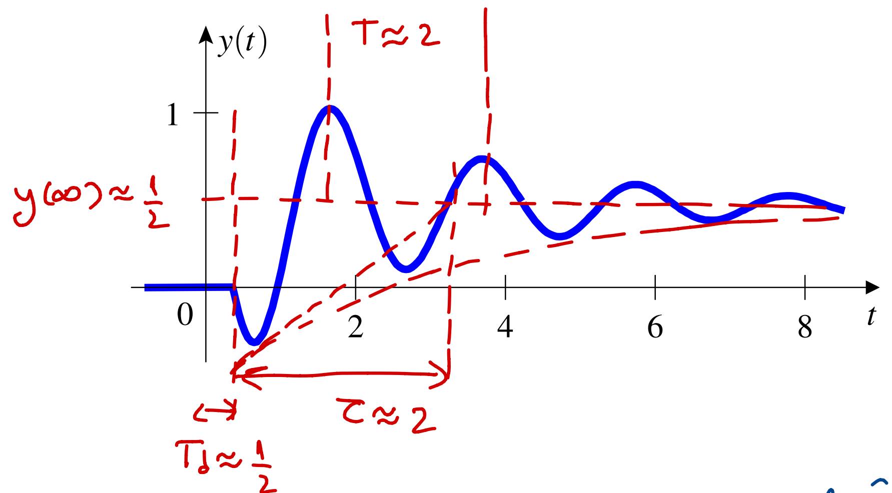
Para controlar basta un PI:

$$C(s) = \frac{K\left(s + \frac{a_0}{2\sqrt{y_Q}}\right)}{s}$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{K b_1}{s + K b_1}$$



Problema 1.2 *La figura muestra la respuesta a un escalón unitario $\mu(t)$ de una planta (lineal e invariante en el tiempo). Diseñe un controlador estabilizante que permita buen seguimiento a referencia tipo escalón.*



i) Por la forma de la respuesta a escalón puede proponerse un modelo nominal de la planta

$$G_o(s) = \frac{K(-s+c)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\, e^{-sT_d}$$

- Retardo: $T_d \approx 1/2$
- Oscilación amortiguada $\Rightarrow$ polos en $-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_{osc}$

  en que $\tau \approx 2$ y $\omega_{osc} = \frac{2\pi}{T} \approx 3$
- Ganancia a continua (o valor estacionario)

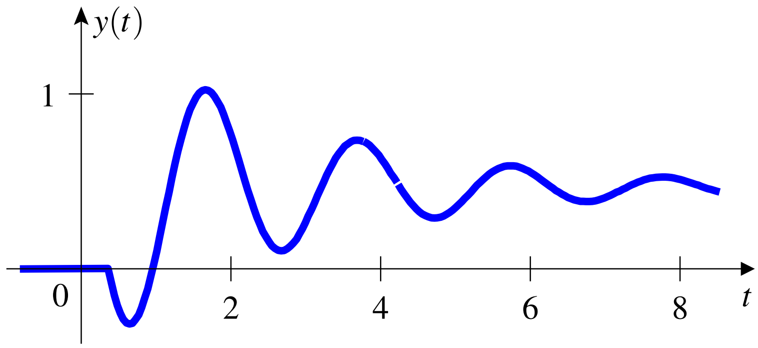
$$y(\infty) = G_o(0) = \frac{Kc}{\omega_n^2} \approx \frac{1}{2}$$

- El cero de fase no mínima provoca el undershoot y se puede estimar con la pendiente inicial

$$y'(T_d^+) = \lim_{s\to\infty} s^2\, \frac{G_o(s)}{s} = -K$$

ii) Un controlador puede diseñarse despreciando el retardo y con ancho de banda $BW(T_o) < 1/T_d$ (pues no hay requisitos sobre ancho de banda) y con integración para garantizar seguimiento estacionario perfecto a DC →

Problema 1.2 *La figura muestra la respuesta a un escalón unitario $\mu(t)$ de una planta (lineal e invariante en el tiempo). Diseñe un controlador estabilizante que permita buen seguimiento a referencia tipo escalón.*



ii) Diseño de C(s)

$$G_o(s) = \frac{K(-s+c)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\cancel{e^{-sT_d}} \qquad n=2$$

C(s) con integración $\qquad r=1$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{p_2 s^2+p_1 s+p_0}{s(s+l_0)} = \frac{p_2(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}{s(s+l_0)}$$ PID con cancelación estable

$$\Rightarrow A_{cl} = A_o L + B_o P$$
$$= (s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)\left(s(s+l_0) + K(-s+c)p_2\right)$$
$$= \underbrace{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}_{\text{cancelación}}\underbrace{\left(s^2 + (l_0-Kp_2)s + Kcp_2\right)}_{\text{elegimos como } s^2+2\xi_{cl}\omega_{cl}s+\omega_{cl}^2}$$

en que $\xi_{cl} \approx 0.7$

y $\omega_{cl} < \frac{1}{T_d}$ determina el $B\omega(T_o)$

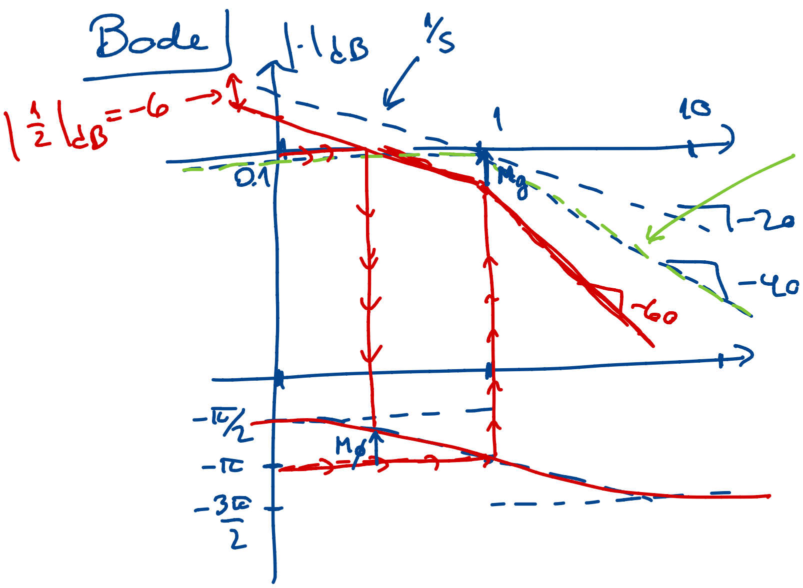
Problema 1.3 *Considere un lazo de control estandar, sin cancelaciones inestables, en que*

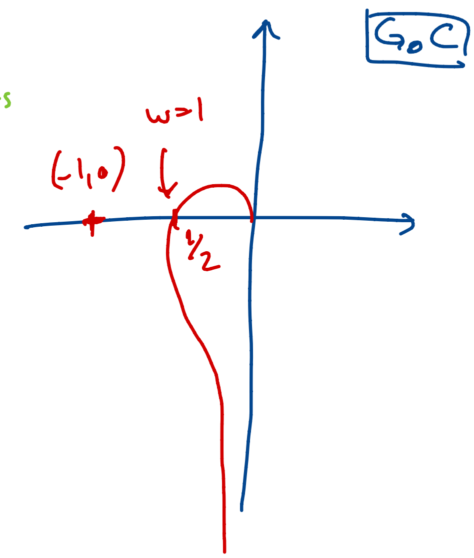
$$G_o(s)C(s) = \frac{1/2}{s(s^2+s+1)}$$

Determine aproximadamente los márgenes de ganancia y de fase.

i) Podemos bosquejar el diagrama de Bode y, a partir de este, el diagrama de Nyquist:

Bode





ii) Margen de ganancia:
del Bode se aprecia que ocurre cuando $\omega = 1$
De hecho $G_oC\Big|_{s=j1} = \dfrac{1/2}{j(-1+j+1)} = \dfrac{-1}{2} \Rightarrow M_g = |2|_{dB} = 6$

iii) Margen de fase: del Bode se aprecia que es cercano a $\pi/4$

$M_\phi \approx \pi/4$

Problema 1.4 *Considere un lazo de control con una grado de libertad en que*

$$G(s) = \frac{1}{s-a} \qquad C(s) = \frac{K(s+a)}{s}$$

en que $a > 0$. El actuador tiene limitaciones, por lo que la señal de control está limitada a $|u(t)| < 2a$. Indique cómo elegiría K para garantizar que el lazo permanezca estable cuando la referencia es un escalón unitario y todas las condiciones iniciales son cero.

La planta dada es INESTABLE por tanto

i) El controlador debe ser estabilizante, y

ii) para $r(t) = \mu(t)$ debe evitar que $u(t)$ entre en zona de saturación pues la planta quedaría en lazo abierto y es INESTABLE.

Entonces,

i) $A_{cl}(s) = (s-a)s + K(s+a)$

$= s^2 + (K-a)s + Ka \Rightarrow \left.\begin{matrix} K-a>0 \\ Ka>0 \end{matrix}\right\}$ para garantizar estabilidad

$\Rightarrow \boxed{K > a}$

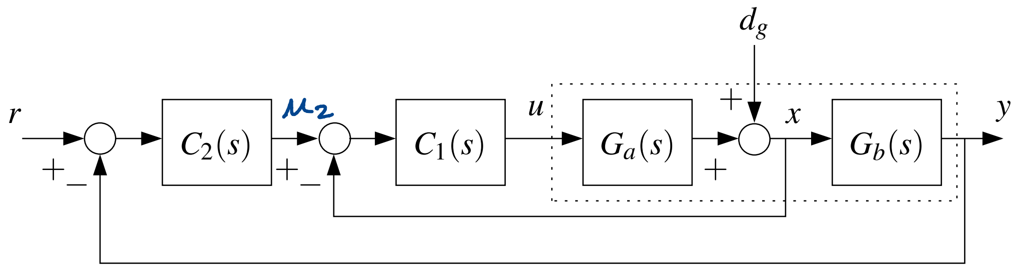
ii) analizamos $u(0^+) = S_{uo}(\infty)$ (cuando $r(t) = \mu(t)$)

$$S_{uo}(s) = \frac{C}{1+G_oC} = \frac{K(s+a)(s-a)}{s^2+(K-a)+Ka} \xrightarrow{s\to\infty} K$$

Por tanto, si se elige $\boxed{K < 2a}$ se garantiza que el lazo permanece en zona lineal pues no se alcanza la saturación

$$\therefore \quad \boxed{a < K < 2a}$$

Problema 1.5 *En el lazo de control en cascada de la figura, la perturbación generalizada es un escalón unitario, es decir, $d_g(t) = \mu(t)$ y todas las condiciones iniciales son cero. Determine el valor inicial de la actuación, es decir, $u(0^+)$.*



Para obtener $u(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\left(\frac{H(s)}{s}\right) = H(\infty)$

en $H(s)$ es la función de transferencia entre $D_g(s)$ y $U(s)$.

$H(s)$ se puede obtener por <u>álgebra de bloques</u>

i) $X = D_g + G_a U$

ii) $U = C_1(U_2 - X)$

iii) $U_2 = C_2(-G_b X)$

donde eliminamos X y U_2

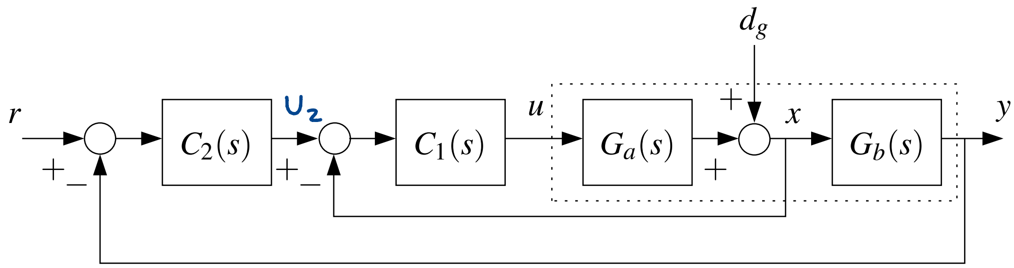
iii) en ii) $\quad U = C_1(-C_2 G_b - 1)X$

usando i) $\Rightarrow \quad U = -C_1(1 + C_2 G_b)(D_g + G_a U)$

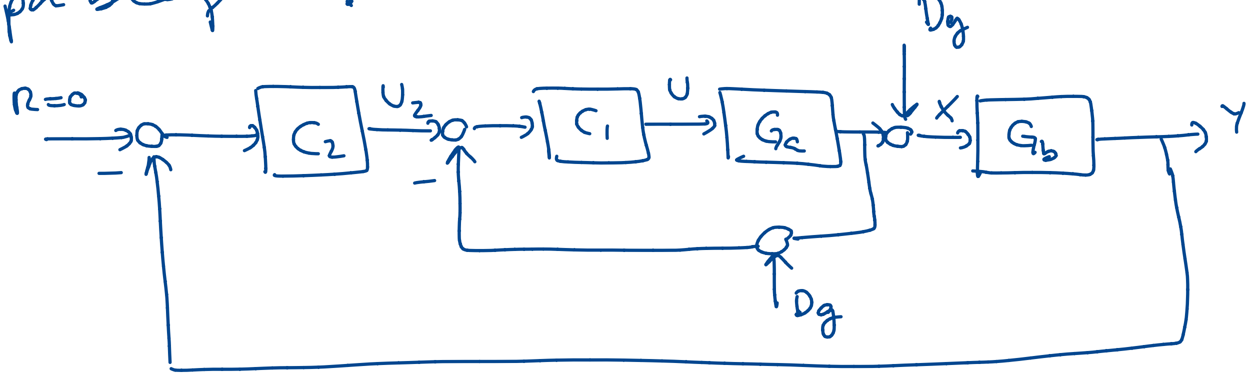
$\Rightarrow \quad (1 + C_1(1 + C_2 G_b)G_a)U = -C_1(1 + C_2 G_b)D_g$

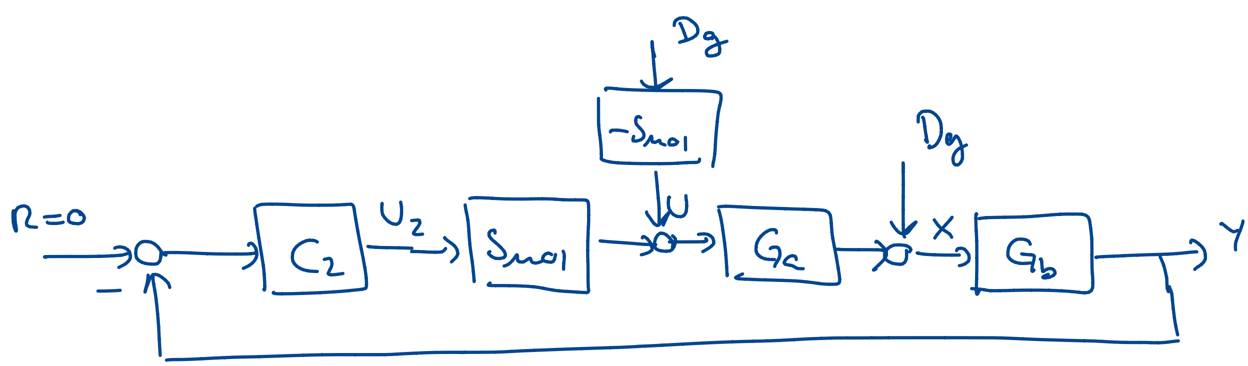
$$\Rightarrow \quad \frac{U}{D_g} = \frac{-C_1(1 + C_2 G_b)}{1 + C_1 G_a + C_1 C_2 G_a C_b}$$

Problema 1.5 *En el lazo de control en cascada de la figura, la perturbación generalizada es un escalón unitario, es decir,* $d_g(t) = \mu(t)$ *y todas las condiciones iniciales son cero. Determine el valor inicial de la actuación, es decir,* $u(0^+)$.



...o por bloques :





$$\Longrightarrow \quad \frac{U}{D_g} = \frac{-S_{mo1} - G_b C_2 S_{mo1}}{1 + G_a G_b S_{mo1} C_2} \quad ; \quad S_{mo1} = \frac{C_1}{1 + G_a C_1}$$

$$= \frac{-(1 + G_b C_2)\, C_1}{1 + G_a C_1 + G_a G_b C_1 C_2}$$