

ELO270 – S2 2020 – Control #1

Problema 1.1 Considere un sistema con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ definido por la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)(B - y(t)) + Cu(t)$$

en que A, B, C son constantes positivas.

(a) Determine la función de transferencia del modelo linealizado del sistema en cada punto de operación en equilibrio determinado por $u(t) = 0$.

(b) Elija **una** de las funciones de transferencia obtenidas y grafique detalladamente

- Su respuesta a escalón unitario, y
- Su diagrama de Bode.

(a) Consideramos $u_Q = 0$
 En el punto de operación en equilibrio $\left. \frac{dy}{dt} \right|_Q = 0$ ①
 Por tanto en la ecuación diferencial:

$$0 = Ay_Q(B - y_Q) + u_Q \Rightarrow y_Q = 0 \text{ o } y_Q = B$$

Es decir existen 2 puntos de operación en equilibrio ①

$$Q_1: \begin{cases} u_{Q1} = 0 \\ y_{Q1} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad Q_2: \begin{cases} u_{Q2} = 0 \\ y_{Q2} = B \end{cases}$$

El modelo linealizado se obtiene mediante Taylor de 1º orden y usando

$$\begin{cases} u(t) = u_Q + \Delta u(t) \\ y(t) = y_Q + \Delta y(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Idea:} \\ \text{Modelo Lineal} \\ \text{Local en } \Delta s \end{matrix} \quad ①$$

① $\Rightarrow \frac{d}{dt}(y_Q + \Delta y(t)) = Ay_Q(B - y_Q) + [A(B - y_Q) + Ay_Q(-1)]\Delta y(t) + C(u_Q + \Delta u(t))$

① $\Rightarrow \frac{d}{dt}\Delta y(t) = Ay_Q(B - y_Q) + [AB - 2Ay_Q]\Delta y(t) + C\Delta u(t)$

en Q_1 : $\frac{d}{dt}\Delta y = AB\Delta y(t) + C\Delta u(t) \Rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta U} = \frac{C}{s - AB}$

en Q_2 : $\frac{d}{dt}\Delta y = -AB\Delta y(t) + C\Delta u(t) \Rightarrow \frac{\Delta Y}{\Delta U} = \frac{C}{s + AB}$ ①



ELO270 – S2 2020 – Control #1

Problema 1.1 Considere un sistema con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ definido por la ecuación diferencial:

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t)(B - y(t)) + Cu(t)$$

en que A, B, C son constantes positivas.

(a) Determine la función de transferencia del modelo linealizado del sistema en cada punto de operación en equilibrio determinado por $u(t) = 0$.

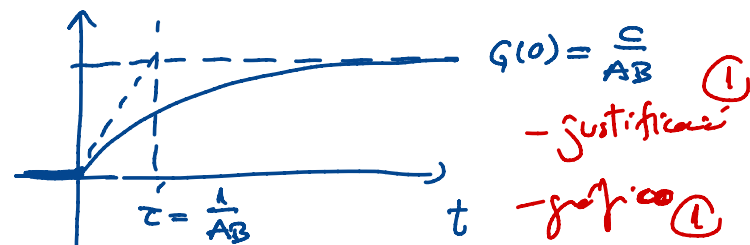
(b) Elija **una** de las funciones de transferencia obtenidas y grafique detalladamente

- Su respuesta a escalón unitario, y
- Su diagrama de Bode.

(b) En Q_2 : $G(s) = \frac{C}{s + AB}$ en que $A, B, C > 0$
 (el sistema es ESTABLE, polo en $s = -AB < 0$)

• La respuesta a escalón es

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{C}{s(s + AB)} = \frac{\frac{C}{AB}}{s} + \frac{-\frac{C}{AB}}{s + AB} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{C}{AB} (1 - e^{-ABt}) u(t)$$



• Forma de Bode:

$$G(s) = \left(\frac{C}{AB}\right) \frac{1}{\left(\frac{s}{AB} + 1\right)}$$

① $\omega_c = AB$
 $G(0) = \frac{C}{AB} > 0$

