ELO270 – S2 2020 – Control #3

Problema 3.1 *Considere un lazo de control nominal en que*

$$G_o(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad ; \qquad C(s) = \frac{K(s+\omega_n)}{s}$$

en que $\omega_n > 0$ *y* $0 < \xi < 1$.

(5) *(a) Haga un diagrama del lugar geométrico de raíces del polinomio de lazo cerrado cuando* $K \in \mathbb{R}$

(b) Si $K = \omega_n$, *determine el rango de valores de* ξ *para que el lazo nominal sea internamente estable.*

(c) La planta verdadera tiene un cero de fase no minima no modelado, es decir,

$$G(s) = (-\alpha s + 1)G_o(s)$$

estime el ancho de banda máximo del lazo nominal, para poder garatizar estabilidad robusta.

(a) El polinomio de lazo cerrado es

$$A_{cl}(s) = \underbrace{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}_{D(s)} + \underbrace{K\omega_n}_{\lambda}\underbrace{(s+\omega_n)}_{N(s)} \quad ✓$$

polos en $p_1 = 0$ $\qquad$ cero en $c = -\omega_n$

$p_{2,3} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$

para $K \geq 0$:

asintotas: $\sigma = \dfrac{\sum p - \sum c}{\#p - \#c} = \dfrac{-2\xi\omega_n + \omega_n}{2} = \dfrac{1-2\xi}{2}\omega_n \Rightarrow -\dfrac{\omega_n}{2} < \sigma < \dfrac{\omega_n}{2}$

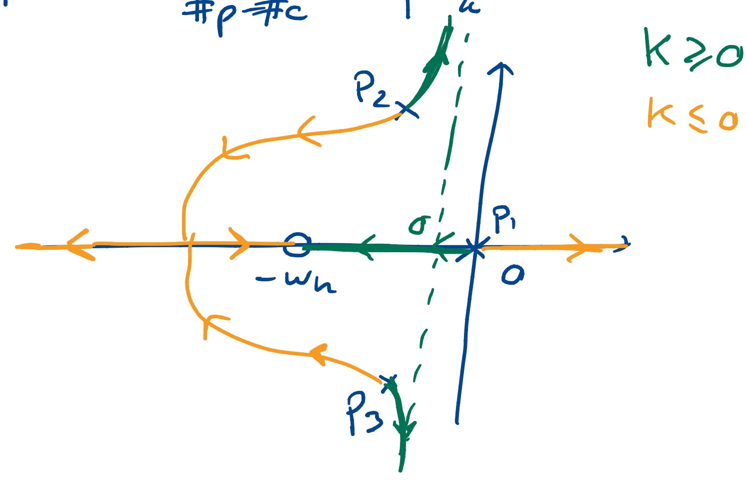
$\eta_k = (2k-1)\dfrac{\pi}{\#p-\#c} = \begin{cases} \pi/2 \\ -\pi/2 \end{cases}$

para $K \leq 0$:

σ es el mismo

$\eta_k = 2k\dfrac{\pi}{\#p-\#c} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$

Finalmente:



polos, ceros ✓

eje real ✓

σ, η_k ✓

movimiento ✓

(un signo ⇒ máx 3 pts)

ELO270 – S2 2020 – Control #3

Problema 3.1 *Considere un lazo de control nominal en que*

$$G_o(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad ; \qquad C(s) = \frac{K(s+\omega_n)}{s}$$

en que $\omega_n > 0$ *y* $0 < \xi < 1$.

(a) *Haga un diagrama del lugar geométrico de raíces del polinomio de lazo cerrado cuando* $K \in \mathbb{R}$

(4) (b) *Si* $K = \omega_n$, *determine el rango de valores de* ξ *para que el lazo nominal sea internamente estable.*

(c) *La planta verdadera tiene un cero de fase no minima no modelado, es decir,*

$$G(s) = (-\alpha s + 1)G_o(s)$$

estime el ancho de banda máximo del lazo nominal, para poder garatizar estabilidad robusta.

(b) Si $k = \omega_n$

$$\Rightarrow A_{cl}(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s + \omega_n^2(s+\omega_n)$$

$$= s^3 + 2\xi\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s + \omega_n^3$$

Routh

s^3	1	$2\omega_n^2$
s^2	$2\xi\omega_n$	ω_n^3
s	γ_{31}	0
1	ω_n^3	

en que $\gamma_{31} = \dfrac{4\xi\omega_n^{\cancel{3}\,2} - \omega_n^{\cancel{3}\,2}}{2\xi\cancel{\omega_n}}$

El lazo nominal es internamente estable

$\Leftrightarrow \gamma_{31} > 0 \Leftrightarrow (4\xi - 1)\omega_n^2 > 0$

$\Leftrightarrow \xi > 1/4$

Además $0 < \xi < 1$, por tanto $1/4 < \xi < 1$

ELO270 – S2 2020 – Control #3

Problema 3.1 *Considere un lazo de control nominal en que*

$$G_o(s) = \frac{\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \qquad ; \qquad C(s) = \frac{K(s+\omega_n)}{s}$$

en que $\omega_n > 0$ *y* $0 < \xi < 1$.

(a) *Haga un diagrama del lugar geométrico de raíces del polinomio de lazo cerrado cuando* $K \in \mathbb{R}$

(b) *Si* $K = \omega_n$, *determine el rango de valores de* ξ *para que el lazo nominal sea internamente estable.*

(3) (c) *La planta verdadera tiene un cero de fase no minima no modelado, es decir,*

$$G(s) = (-\alpha s + 1)G_o(s) \qquad ; \ \alpha > 0$$

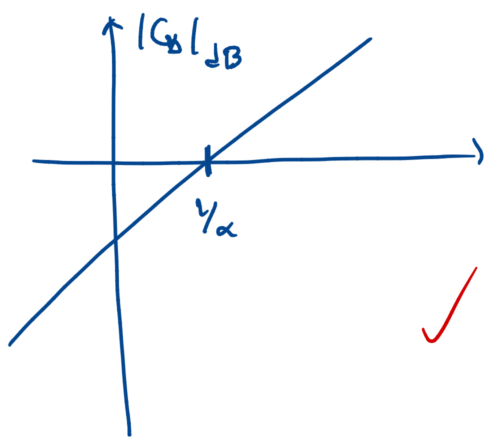
estime el ancho de banda máximo del lazo nominal, para poder garatizar estabilidad robusta.

(c) Para garantizar estabilidad robusta, se debe cumplir la condición

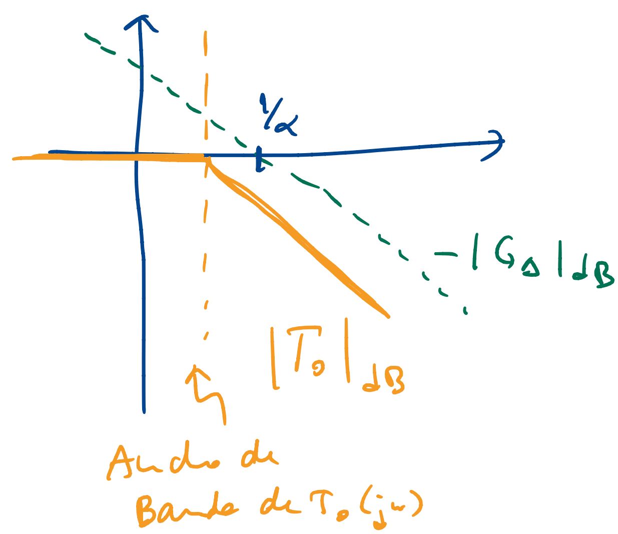
$$|T_o||G_\Delta| < 1 \qquad \forall\omega$$

en que $G_\Delta = \dfrac{G - G_o}{G_o} = \dfrac{(-\alpha s + 1)G_o - G_o}{G_o} = -\alpha s$

$\Rightarrow \ |G_\Delta(j\omega)| = |-\alpha j\omega| = \alpha\omega \Rightarrow |T_o(j\omega)| < \dfrac{1}{\alpha\omega}$



$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ El ancho de banda del lazo nominal debe ser MENOR que $\dfrac{1}{\alpha}$ [rad/s]