Solución

ELO270 – S2 2020 – Examen Final

Problema 1.1 *Considere un sistema con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$ definido por la ecuación diferencial*

$$A\cos(u(t))\,\frac{dy(t)}{dt} = B\,u(t-C) - D\,y^2(t)$$

en que A,B,C,D son constantes positivas.

Determine el o los puntos de operación en equilibrio del sistema, cuando la entrada es $u(t)=1$, indicando si son estables o inestables.

- En primer lugar se determinan los puntos de operación en equilibrio:

$$\left.\begin{aligned} u(t) &= u_Q = 1 \\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_Q &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A\cos(u_Q)\cancel{\left.\frac{dy}{dt}\right|_Q}^{\,0} = B\cancel{u_Q}^{\,1} - D\,y_Q^2$$

$$\Rightarrow \quad y_Q = \pm\sqrt{B/D}$$

- Se linealiza la ecuación diferencial, por ejemplo, haciendo expansión de Taylor de primer orden:

$$A\cos u_Q \cancel{\left.\frac{dy}{dt}\right|_Q}^{\,0} + A(-\operatorname{sen} u_Q)\cancel{\left.\frac{dy}{dt}\right|_Q}^{\,0}\Delta u + A\cos u_Q \frac{d\Delta y}{dt}$$

$$= \cancel{Bu_Q} + B\,\Delta u(t-C) - \cancel{Dy_Q^2} - 2Dy_Q\,\Delta y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = \frac{B\,e^{-Cs}}{s\,A\cos u_Q + 2Dy_Q}$$

- Polo en $p = \dfrac{-2Dy_Q}{A\cos u_Q}$ Note que $\cos(u_Q) = \cos(1) > 0$

si $\left(u_Q = 1,\ y_Q = +\sqrt{B/D}\right) \Rightarrow p < 0$ ESTABLE

si $\left(u_Q = 1,\ y_Q = -\sqrt{B/D}\right) \Rightarrow p > 0$ INESTABLE

Problema 1.2 *Considere un lazo de control nominal estándar en que*

$$G_o(s) = \frac{-s+c}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \qquad T_o(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

en que $c > 0$, $0 < \xi < 1$, $\omega_n > 0$ *y* $\alpha > 0$.

Determine todos los polos de lazo cerrado. ¿Es el lazo internamente estable?

- Se pueden obtener las 4 funciones de sensibilidad nominal

$$T_o = \frac{\alpha}{s+\alpha} \quad \Rightarrow \quad S_o = 1 - T_o = \frac{s}{s+\alpha}$$

$$S_{uo} = \frac{T_o}{G_o} = \frac{\alpha}{(s+\alpha)} \cdot \frac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{(-s+c)}$$

$$S_{io} = S_o G_o = \frac{s}{s+\alpha} \cdot \frac{(-s+c)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

- Por tanto $A_{cl} = (s+\alpha)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(-s+c)$

  polos en $-\alpha$, $-\xi\omega_n \pm j\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_n$, c

- El último es un polo INESTABLE pues $c > 0$.

- Alternativamente se puede primero obtener el controlador del lazo nominal:

$$S_o \cdot C = S_{uo} \Rightarrow C = \frac{S_{uo}}{S_o} = \frac{\cancel{s+\alpha}}{s} \cdot \frac{\alpha}{\cancel{s+\alpha}} \cdot \frac{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}{(-s+c)}$$

- Entonces $A_{cl} = A_o L + B_o P$

$$= (s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)\,s(-s+c) + (-s+c)\,\alpha\,(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)$$

$$= (s+\alpha)(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(-s+c)$$

Problema 1.3 *Considere un lazo de control nominal estándar en que*

$$G_o(s)=\frac{20a^2}{(s+a)(s+10a)}$$

Determine si ***usando un control PI*** *es posible obtener un lazo cerrado tal que todos los transientes decaigan a cero mas rápido que* e^{-3at}.

- Puede analizarse con Routh, haciendo el cambio de variable $s = w - 3a$

De esta forma $\boxed{\mathrm{Re}\{w\}<0} \iff \boxed{\mathrm{Re}\{s\}<3a} \Leftarrow e^{-3at}$

- Controlador PI: $C(s)=\dfrac{K(s+c)}{s}$

- Polinomio de lazo cerrado: $A_{cl}(s) = A_o(s)\,L(s) + B_o(s)\,P(s)$

$$= (s+a)(s+10a)s + 20a^2K(s+c)$$

$$\Rightarrow A_{cl}(w) = (w-2a)(w+7a)(w-3a) + 20a^2K(w-3a+c)$$

$$= (w^2+5aw-14a^2)(w-3a) + 20a^2Kw + 20a^2K(c-3a)$$

$$= w^3+2aw^2+(-14a^2-15a^2+20a^2K)w + (42a^3+20a^2K(c-3a))$$

$$= w^3+2aw^2+(20a^2K-29a^2)w+(42a^3+20a^2K(c-3a))$$

- Arreglo de Routh:

w^3	1	$20a^2K-29a^2$
w^2	$2a$	$42a^3+20a^2K(c-3a)$
w	γ_{31}	0
1	$42a^3+20a^2K(c-3a)$	

$42a^3+20a^2K(c-3a) \longrightarrow \cancel{2a^2}(21a+10K(c-3a))>0$

$\boxed{c>3a-\frac{21a}{10K}}$ $(K>0)$

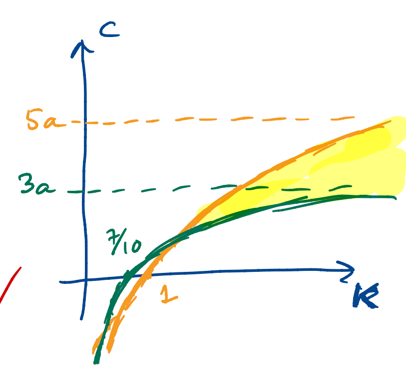
$$\gamma_{31} = \frac{40a^3K-58a^3-42a^3-20a^2Kc+60a^3K}{2a} > 0$$

$$\gamma_{31} = \frac{100a^3K-100a^3-20a^3Kc}{\cancel{2a}} > 0$$

$$\gamma_{31} = 10(5a^2K-5a^2-aKc) > 0$$

$$\Rightarrow c < 5a\left(1-\frac{1}{K}\right)$$

∴ Hay solución en la región indicada en amarillo $\longrightarrow$



Problema 1.3 *Considere un lazo de control nominal estándar en que*

$$G_o(s) = \frac{20a^2}{(s+a)(s+10a)}$$

Determine si ***usando un control PI*** *es posible obtener un lazo cerrado tal que todos los transientes decaigan a cero mas rápido que* e^{-3at}.

- Puede analizarse mediante LGR:

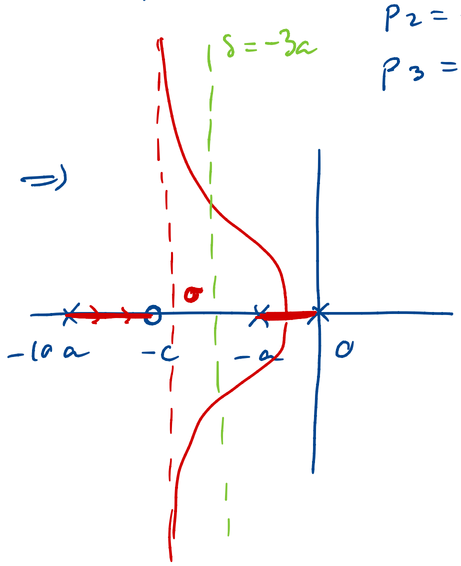
si $C(s) = \frac{K(s+c)}{s}$ y $G_o(s) = \frac{20a^2}{(s+a)(s+10a)}$

$$A_{cl} = \underbrace{s(s+a)(s+10a)}_{D(s)} + \underbrace{K\,20a^2}_{\lambda}\,\underbrace{(s+c)}_{N(s)}$$

polos en $p_1 = 0$, $p_2 = -a$, $p_3 = -10a$

cero en $s = -c$

$\Rightarrow$



- Hay LGR en el eje real entre $-10a$ y $-c$ y entre $-a$ y 0
- Asíntotas se intersectan en

$$\sigma = \frac{\sum p - \sum c}{\#p - \#c} = \frac{-11a + c}{2}$$

con ángulos $\eta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $<$ $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$

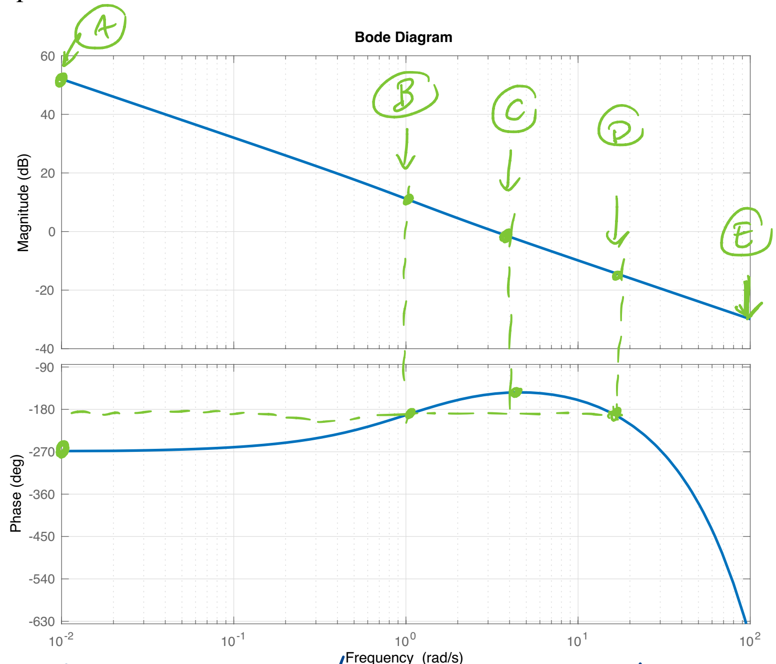
$\therefore$ Si $-c < -3a$ y $\frac{-11a+c}{2} < -3a$

Así, para K grande, los 3 polos de lazo cerrado están a la izquierda de $s=-3a$ y por tanto son modos naturales más rápidos que e^{-3at}

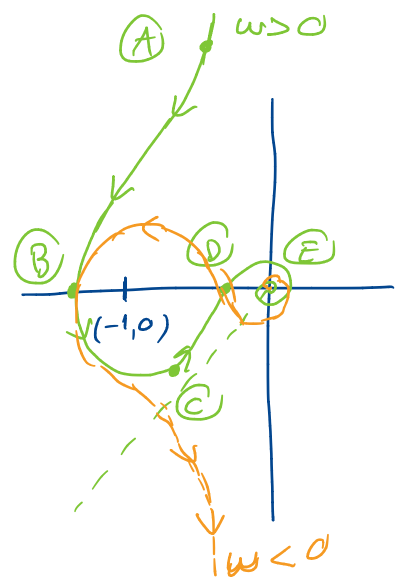
$\boxed{c > 3a}$ y $\boxed{c < 5a}$ $\Leftarrow$ ¡hay solución!

Problema 1.4 *En un lazo de control estándar, se sabe que la planta $G_o(s)$ tiene un polo inestable en $p_1 > 0$ y que el controlador $C(s)$ es un PI. La figura muestra el diagrama de Bode de la transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$ (sin cancelaciones inestables).*

Determine, si es posible, si el lazo cerrado es o no internamente estable.



- Se analizará usando el Criterio de Nyquist
- Información sobre G_oC indica que tiene $\boxed{P = 1}$ polos en el semiplano derecho abierto
- A partir del Bode se puede hacer un esbozo del Nyquist:



A) Para $\omega \to 0$ $\begin{cases} |G_oC| \to \infty \\ \measuredangle G_oC = -270° \end{cases}$

B) Cuando $\measuredangle G_oC \approx -180° \Rightarrow |G_oC| > 1$

C) Cuando $|G_oC| \approx 1 \Rightarrow \measuredangle G_oC \approx -135° = -\frac{3\pi}{4}$

D) Cuando $\measuredangle G_oC \approx -180° \Rightarrow |G_oC| < 1$

E) Cuando $\omega \to \infty$ $\begin{cases} |G_oC| \to 0 \\ \measuredangle G_oC \text{ "se enrolla"} \end{cases}$

- Para determinar N falta información sobre

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} G_oC\Big|_{s=\varepsilon} = \begin{cases} -\infty \Rightarrow N = -1 \Rightarrow Z = N + P = 0 & \text{¡ESTABLE!} \\ +\infty \Rightarrow N = -2 \Rightarrow Z = -1 & \text{¡imposible!} \end{cases}$$

Por tanto, el lazo es internamente estable.

Problema 1.5 *Considere un lazo de control estándar en que la planta tiene modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{K}{s+p}$$

en que K y p son constantes positivas. Se sabe que la señal de referencia es $r(t) = \cos(\omega_{ref} t)$ *y que la actuación está limitada a* $|u(t)| \leq U_{\text{máx}}$.

Proponga un controlador estabilizante tal que, en estado estacionario, no haya saturación en la actuación.

- Para que NO haya saturación en $u(t)$ en estado estacionario se debe limitar ancho de banda tal que

$$\boxed{|S_{uo}(\pm j\omega_{ref})| < U_{\text{máx}}}$$ ✓

(No se resuelve el problema)

- Dada la referencia sinusoidal, se puede diseñar un controlador RESONANTE

$$C(s) = \frac{P(s)}{(s^2+\omega_{ref}^2)\bar{L}(s)}$$ ✓ $\leftarrow r = 2$ restricciones

- pero si $C(\pm j\omega_{ref}) = \infty \Rightarrow S_{uo}(\pm j\omega_{ref}) = \dfrac{1}{G_o(\pm j\omega_{ref})}$

$$= \frac{j\omega_{ref} + p}{K}$$ ✓✓

$$\Rightarrow |u(t)| = |S_{uo}(\pm j\omega_{ref})| = \frac{\sqrt{\omega_{ref}^2 + p^2}}{K}$$

- Por tanto, con el controlador resonante, se puede evitar la saturación si y solo si $\dfrac{\sqrt{\omega_{ref}^2+p^2}}{K} < U_{\text{máx}}$ ✓

- Alternativamente, se puede garantizar buen seguimiento a la referencia sinusoidal usando un controlador con integración tal que el ancho de banda del lazo sea MAYOR que ω_{ref}.

$\longrightarrow$

Problema 1.5 *Considere un lazo de control estándar en que la planta tiene modelo nominal*

$$G_o(s) = \frac{b_o}{s+a_o}$$

en que b_o *y* a_o *son constantes positivas. Se sabe que la señal de referencia es* $r(t) = \cos(\omega_{ref} t)$ *y que la actuación está limitada a* $|u(t)| \leq U_{\text{máx}}$.

Proponga un controlador estabilizante tal que, en estado estacionario, no haya saturación en la actuación.

- Alternativamente, se puede garantizar buen seguimiento a la referencia sinusoidal usando un controlador con integración tal que el ancho de banda del lazo sea MAYOR que w_{ref}.

$$C(s) = \frac{P(s)}{s\,\bar{L}(s)} \leftarrow r=1 : \text{una restricción}$$

- Planta de orden $n=1$
- Orden del controlador $n_p = n_\ell = n-1+r = 1$ para hacer asignación de polos. Es decir

$$C(s) = \frac{p_1 s + p_o}{s} = \frac{p_1(s+a_o)}{s} \leftarrow \text{por simplicidad}$$

- Ecuación diofantina

$$A_d(s) = A_o L + B_o P$$
$$= (s+a_o)s + b_o p_1 (s+a_o)$$
$$= (s+a_o)(s+b_o p_1) \Rightarrow T_o(s) = \frac{b_o p_1}{s+b_o p_1} = \frac{1}{\frac{s}{b_o p_1}+1}$$

p_1 determina Bw

$b_o p_1 > w_{ref}$

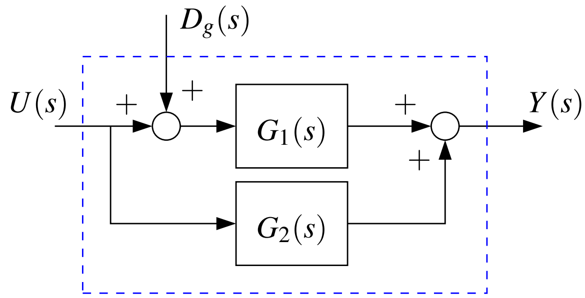
- $$S_{uo}(s) = \frac{C}{1+G_oC} = \frac{A_oP}{A_oL+B_oP} = \frac{\cancel{(s+a_o)}\,p_1(s+a_o)}{\cancel{(s+a_o)}(s+b_o p_1)}$$

$$|S_{uo}(jw_{ref})| = \frac{|T_o(jw_{ref})|}{|G_o(jw_{ref})|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w_{ref}}{b_o p_1}\right)^2+1}} \cdot |G_o(jw_{ref})| < U_{\text{máx}}$$

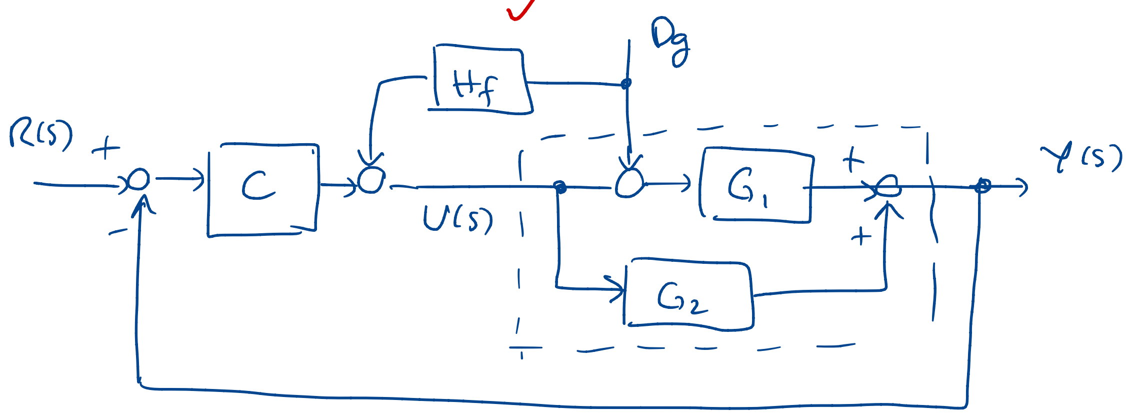
donde se obtiene condición para $b_o p_1 < (b_o p_1)_{\text{máx}} = \left(\frac{|G_o(jw_{ref})|^2}{U_{\text{máx}}^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} w_{ref}$

Problema 1.6 *Considere un lazo de control estándar en que la planta tiene la estructura que se muestra en la figura.*

Si la perturbación $d_g(t)$ es medible, indique cómo utilizaría dicha medición para mejorar el desempeño del lazo.



- Si la perturbación es medible puede agregarse un bloque de prealimentación al lazo estándar:



- El bloque $H_f(s)$ no afecta la estabilidad del lazo pero debe ser PROPIO y ESTABLE.
- Para diseñar $H_f(s)$ se analiza el efecto de $d_g(t)$ sobre $y(t)$

$$\frac{Y(s)}{D_g(s)} = \frac{G_1 + H_f\,(G_1+G_2)}{1 + C\,(G_1+G_2)}$$

para que sea cero

- Por tanto, idealmente $H_f = \frac{-G_1}{(G_1+G_2)}$
- Limitaciones para el diseño de H_f:
  - → ruido de medición para $d_g(t)$
  - → amplitud de la actuación $u(t)$