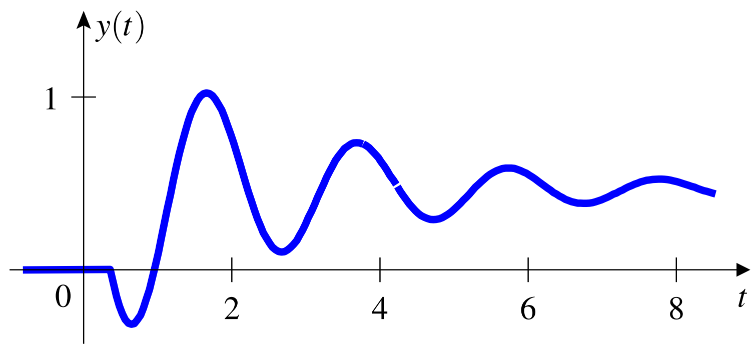
Solución

ELO270 – S2 2021 – Certamen C1

Problema 1.1 (10 puntos) *La respuesta de una planta a un escalón unitario en $t = 0$ se muestra en la figura.*

Haga un gráfico aproximado, pero cualitativamente correcto, de la salida de la planta en un esquema de ***control de lazo abierto*** *diseñado para una respuesta* rápida *y con buen seguimiento a constante y para una actuación limitada por $|u(t)| < 2$, cuando la referencia es un escalón unitario.*



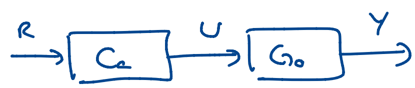
De la figura se puede deducir que un buen modelo para la planta es de la forma:

$$G_o(s) = \frac{K(-s+c)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\, e^{-sT_d}$$

debido a que hay
- una oscilación amortiguada
- undershoot
- retardo de tiempo

Un controlador de lazo abierto debe ser aproximadamente igual a $(G_o(s))^{-1}$ pero debe ser estable y realizable y por tanto No puede invertirse el cero de Fase No mínima ni el retardo; pero sí los polos complejos y la ganancia a continua:

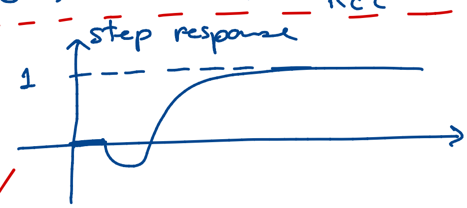
$$C_a(s) = \frac{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}{Kc(\tau s+1)^2}$$



en que τ debe elegirse de manera que $u(0^+) = C_a(\infty) = \frac{1}{Kc\tau^2} \leq 2$

De esta forma:

$$G_o(s)\,C_a(s) = \frac{(-s+c)\, e^{-sT_d}}{c(\tau s+1)^2} \Rightarrow$$



Es decir hay
- undershoot
- retardo
- ganancia a DC unitaria

Solución

ELO270 – S2 2021 – Certamen C1

Problema 1.2 (10 puntos) *Considere el lazo de control estándar en que*

$$G_o(s) = \frac{K(s+c)}{(s^2-a^2)} \quad ; \quad S_o(s) = \frac{s(s+a)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

en que las constantes K, c, a, ξ, ω_n son todas positivas. Determine si el lazo cerrado es o no internamente estable.

El lazo cerrado es internamente estable

$\iff$ Todos los polos de lazo cerrado están en el semiplano izquierdo abierto ($\Re\{p_i\} < 0$)

$\iff$ Todas las (4) funciones de sensibilidad son ESTABLES

Notamos que $S_o(s) = \dfrac{s(s+a)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$ es estable (pues ξ y ω_n son positivas)

$$\Rightarrow \quad T_o(s) = 1 - S_o(s)$$
$$= \frac{(2\xi\omega_n - a)s + \omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad \text{también es estable}$$

sin embargo $S_{io}(s) = S_o(s)\,G_o(s)$

$$= \frac{K(s+c)\, s\, \cancel{(s+a)}}{(s-a)\cancel{(s+a)}(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$$

tiene polo inestable en $s = a > 0$

por tanto el lazo es inestable

[De hecho, el polinomio de lazo cerrado es:

$$A_{cl}(s) = (s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s-a)(s+c)$$

pues $S_{uo}(s) = \dfrac{T_o(s)}{G_o(s)} = \dfrac{(s+a)(s-a)}{K(s+c)} \cdot \dfrac{[(2\xi\omega_n - a)s + \omega_n^2]}{(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$]

Solución

ELO270 – S2 2021 – Certamen C1

Problema 1.3 (10 puntos) *Considere el lazo de control estándar en que*

$$C(s) = K_p \quad ; \quad G_o(s) = \frac{1}{(s+a)^4}$$

en que $a > 0$. Determine, si existen, condiciones sobre el controlador tal que aparecen oscilaciones sostenidas en el lazo y cuál es la frecuencia de dicha oscilación.

El problema puede resolverse aplicando Routh o LGR.

- Routh:

$$A_{cl}(s) = A_oL + B_oP$$
$$= (s+a)^4 + K_p$$
$$= s^4 + 4as^3 + 6a^2s^2 + 4a^3s + (a^4 + K_p)$$

Arreglo de Routh:

s^4	1	$6a^2$	a^4+K
s^3	$4a$	$4a^3$	0
s^2	$\frac{24a^3-4a^3}{4a} = 5a^2$	a^4+K_p	0
s	$\frac{20a^5-4a^5-4aK_p}{5a^2} = \frac{16a^3 - 4\frac{K_p}{a}}{5}$	0	
1			

para que haya oscilación en el lazo esta fila debe ser igual a cero $\Leftrightarrow$ $16a^3 - 4\frac{K_p}{a} = 0$

$\boxed{K_p = 4a^4}$ ganancia crítica

Reemplazando la ganancia crítica en la fila anterior obtenemos: $5a^2s^2 + (a^4+K_p) = 5a^2(\underbrace{s^2+a^2}_{0})$

polos en $\pm ja$, por tanto la frecuencia de oscilación es $\boxed{\omega_{osc} = a}$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$

$\boxed{\text{Solución}}$

ELO270 – S2 2021 – Certamen C1

Problema 1.3 (10 puntos) *Considere el lazo de control estándar en que*

$$C(s) = K_p \quad ; \quad G_o(s) = \frac{1}{(s+a)^4}$$

en que $a > 0$. *Determine, si existen, condiciones sobre el controlador tal que aparecen oscilaciones sostenidas en el lazo y cuál es la frecuencia de dicha oscilación.*

(alternativamente)

• LGR: el polinomio de lazo cerrado es

$$A_{cl}(s) = \underbrace{(s+a)^4}_{D(s)} + \underbrace{K_p}_{\lambda} \qquad \overbrace{N(s)=1}$$

no hay ceros

polos en $-a$ (cuatro)

para $K_p = \lambda > 0$

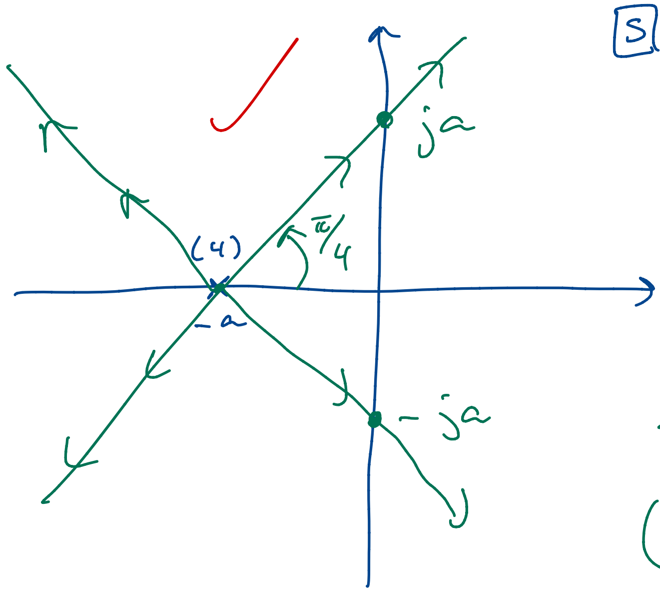
• no hay LGR en el eje real

• hay 4 asíntotas: $\sigma = \dfrac{\sum p - \sum c}{\#p - \#c} = \dfrac{-4a}{4} = -a$

(para $\lambda \to +\infty$)

$$\eta_k = (2k-1)\frac{\pi}{\#p-\#c} = \begin{cases} \pi/4 \\ 3\pi/4 \\ 5\pi/4 \\ 7\pi/4 \end{cases}$$

• LGR comienza (para $\lambda = 0$) en $s = -a$



Se aprecia en el LGR que los polos de lazo cerrado pasan al semiplano derecho en $s = \pm ja \Rightarrow \boxed{\omega_{osc} = a}$

Para encontrar K_p se puede usar Routh (página anterior) o hacer división polinomial:

* $\left[(s+a)^4 + K_p\right] / (s^2 + a^2) = \dots$

(* Note que para $K_p = \lambda < 0$ no hay oscilación)

Solución

ELO270 – S2 2021 – Certamen C1

Problema 1.4 (10 puntos) *Considere el lazo de control estándar en que*

$$C(s) = \frac{K_P(s+c)}{s} = K_P + \frac{K_I}{s} \quad ; \quad G_o(s) = \frac{1}{(s-p)(s+p)}$$

Determine si es posible estabilizar la planta con un controlador con la estructura PI propuesta.

Si analizamos el polinomio de lazo cerrado:

$$A_{cl} = (s+p)(s-p)s + K_p s + K_I$$

$$= s^3 - p^2 s + K_p s + K_I$$

$$= s^3 + 0 s^2 + (K_p - p^2)s + K_I$$

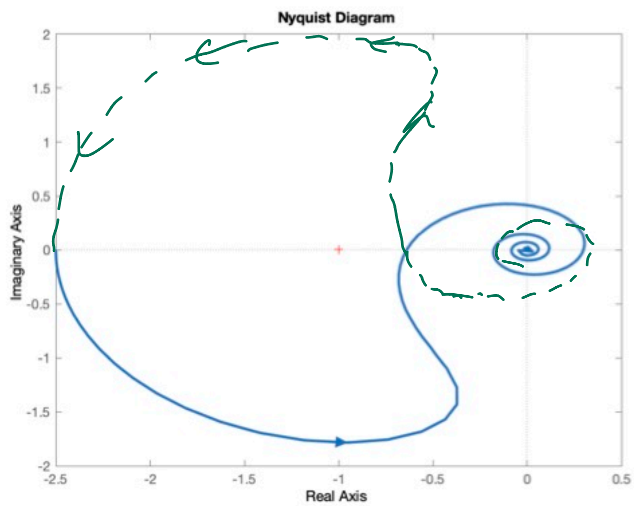
(coeficientes)

no es posible estabilizar el lazo pues los coeficientes del A_{cl} no cumplen la condición necesaria de ser todos (estrictamente) positivos

Solución

ELO270 – S2 2021 – Certamen C1

Problema 1.5 (10 puntos) *La figura muestra el diagrama de Nyquist de la transferencia de lazo abierto $G_o(s)C(s)$, en que no hay cancelaciones. Determine, si es posible, si el lazo cerrado es o no estable.*



- La figura muestra el diagrama de Nyquist para $\omega > 0$
- Para $\omega < 0$ se debe reflejar con respecto al eje horizontal (es decir, se hace el complejo conjugado)
- Por el sentido de la flecha se aprecia $N = -1$ pues el Nyquist encierra una vez en sentido Antihorario el punto $(-1, 0)$
- $N = Z - P \iff Z = N + P$ es el número de polos de lazo cerrado inestables (depende de P)

Por tanto el lazo será estable si y sólo si $P = 1$, es decir, si G_oC tiene un solo polo en el SPD abierto.

- Sin embargo, NO hay información al respecto. Por tanto NO es posible determinar si el lazo es o no estable.